correction de l'exercice 1
Il est immédiat que :

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$
$$\sum_{j=3}^{8} \frac{j^2}{3^j} = \frac{3^2}{3^3} + \frac{4^2}{3^4} + \frac{5^2}{3^5} + \frac{6^2}{3^6} + \frac{7^2}{3^7} + \frac{8^2}{3^8}$$
$$\sum_{n=1}^{5} (-1)^{n^2} \frac{x^{2n+4}}{n} = (-1)^{1^2} \frac{x^{2\times 1+4}}{1} + (-1)^{2^2} \frac{x^{2\times 2+4}}{2} + (-1)^{3^2} \frac{x^{2\times 3+4}}{3} + (-1)^{4^2} \frac{x^{2\times 4+4}}{4} + (-1)^{5^2} \frac{x^{2\times 5+4}}{5}$$
$$\sum_{p=3}^{5} x(1-x^2)^p = x(1-x^2)^3 + x(1-x^2)^4 + x(1-x^2)^5$$
$$\sum_{s=2}^{s=8} \frac{s^2+s+1}{s^2+1} = \frac{2^2+2+1}{2^2+1} + \frac{3^2+3+1}{3^2+1} + \frac{4^2+4+1}{4^2+1} + \frac{5^2+5+1}{5^2+1} + \frac{6^2+6+1}{6^2+1} + \frac{7^2+7+1}{7^2+1} + \frac{8^2+8+1}{8^2+1}$$

correction de l'exercice 2
$\boxed{A}$: On constate que la seule expression variable est la base de la puissance $(2, 3, .., n)$ et qu'elle prend toutes les valeurs entières entre 2 et n donc on a

$$2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + n^5 = \sum_{k=2}^{5} k^5$$

$\boxed{B}$: On constate qu'il y a deux variations : celle du signe et celle de l'exposant. En se rapellant que $a^0 = 1$, on voit que l'exposant prend toutes les valeurs entières entre 0 et n. D'autre part, la suite $(-1)^k$ est une suite qui permet aisément d'alterner le signe puisque $(-1)^0 = 1$, $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2$, ... donc on a

$$1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + (-1)^n a^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^k = \sum_{k=0}^{n} (-a)^k$$

$\boxed{C}$: On constate qu'une seule expression est variable : l'exposant et le dénominateur. Il prend que les valeurs paires donc les valeurs de la forme $2k$. Puisque $2k = 2 \Leftrightarrow k = 1$ et $2k = 2n \Leftrightarrow k = n$, on obtient que

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^6}{6} + \cdots + \frac{a^{2n}}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{2k}}{2k}$$

$\boxed{D}$: On constate qu'il y a deux expressions variables : l'exposant et de dénominateur. Puisque $2^0 = 1$, on voit que l'exposant prend toutes les valeurs entre 0 et 2005 et que le dénominateur est égal à l'exposant auquel on ajoute 1. L'expression $\dfrac{2^k}{k+1}$ est un bon candidat et l'on vérifie aisément que

$$\frac{2^0}{0+1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{2^1}{1+1} = \frac{2}{2}, \quad \frac{2^2}{2+1} = \frac{2^2}{3}, ..., \frac{2^{2005}}{2005+1} = \frac{2^{2005}}{2006}$$

donc on a la formule

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + .. + \frac{2^{2005}}{2006} = \sum_{k=0}^{2005} \frac{2^k}{k+1}$$

Remarque : On aurait également pu choisir comme variable le dénominateur. Celui ci varie parmi tous les entiers compris entre 1 *et* 2006, *l'exposant étant égal au dénominateur auquel on retranche* 1 *et l'on constate aisément que*

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + .. + \frac{2^{2005}}{2005} = \sum_{k=1}^{2006} \frac{2^{k-1}}{k}$$

On verra ensuite que les deux formules sont équivalentes par changement de variable.
$\boxed{E}$: On constate qu'il y a trois expressions variables : le signe, le numérateur et le dénominateur.
En outre, le numérateur prend toutes les valeurs entières entre 1 et n et le dénominateur étant toujours égal au numérateur auquel on a ajouté 1, on est tenté de considérer l'expression $(-1)^k \dfrac{k}{k+1}$. Lorsque $k = 1$,

$$(-1)^k \frac{k}{k+1} = (-1)^1 \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

donc on n'a pas le bon signe. Il suffit de faire une petite modification en considérant $(-1)^{k+1} \dfrac{k}{k+1}$. Dans ce cas, lorsque $k = 1$, on a

$$(-1)^{k+1} \frac{k}{k+1} = (-1)^{1+1} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

lorsque $k=2$, on a
$$(-1)^{k+1}\frac{k}{k+1}=(-1)^{2+1}\frac{2}{2+1}=-\frac{2}{3}$$
et lorsque $k=n$, on a
$$(-1)^{k+1}\frac{k}{k+1}=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$$
Clairement, la formule est alors
$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{k}{k+1}$$
Remarque : on aurait pu considérer également que la variable k est le dénominateur. Il prend ses valeurs parmi les entiers compris entre 2 et $n+1$ et l'on a la formule
$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}=\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k}\frac{k-1}{k}$$
On verra ensuite que les deux formules sont équivalentes par changement de variable.

$\boxed{E}$: Il suffit simplement de remarquer que
$$\ln(1\times 2\times 3\times\cdots\times n)=\ln(1)+\ln(2)+\cdots+\ln(n)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$$

correction de l'exercice 3

$\boxed{A_n}$: Par linéarité du symbole de sommation, on a
$$A_n=2\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)+\sum_{k=0}^{n}1=2\times\frac{n(n+1)}{2}+(n-0+1)=n(n+1)+(n+1)=(n+1)[n+1]=(n+1)^2$$

$\boxed{B_n}$: Par linéarité du symbole de sommation, on a
$$\begin{aligned}B_n &= 6\sum_{k=0}^{n+1}k^2+4\sum_{k=0}^{n+1}k+\sum_{k=0}^{n+1}1=6\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}+4\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}+(n+1-0+1)\times 1\\ &= (n+1)\underline{(n+2)}(2n+3)+2(n+1)\underline{(n+2)}+\underline{(n+2)}=(n+2)\left[(n+1)(2n+3)+2(n+1)+1\right]\\ &= (n+2)\left[(n+1)(\underline{2n+3})+\underline{2n+3}\right]=(n+2)(2n+3)\left[(n+1)+1\right]=(n+2)^2(2n+3)\end{aligned}$$

$\boxed{C}$:
$$C=\sum_{p=945}^{2004}3=3\times(2004-945+1)=3180$$

$\boxed{D_n}$: En développant le produit sous la symbole de sommation et en utilisant la linéarité de celui-ci, on a
$$\begin{aligned}D_n &= \sum_{k=1}^{2n}k(2k-1)(k+1)=\sum_{k=1}^{2n}2k^3+k^2-k=2\sum_{k=1}^{2n}k^3+\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{2n}k=2\sum_{k=0}^{2n}k^3+\sum_{k=0}^{2n}k^2-\sum_{k=0}^{2n}k\quad(0^3=0^2=0)\\ &= 2\left[\frac{(2n)(2n+1)}{2}\right]^2+\frac{(2n)(2n+1)(2(2n)+1)}{6}-\frac{(2n)(2n+1)}{2}\\ &= (2n)(2n+1)\left[\frac{(2n)(2n+1)}{2}+\frac{4n+1}{6}-\frac{1}{2}\right]=(2n)(2n+1)\left(2n^2+\frac{5}{3}n-\frac{1}{3}\right)=(2n)(2n+1)\left(\frac{6n^2+5n-1}{3}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{E_n}$: Ce n'est pas en l'état une somme de suite géométrique (l'exposant doit croître d'une unité seulement entre deux termes consécutifs, $a^n+a^{n+1}+\cdots$). On doit donc transformer cette écriture en utilisant les règles de calcul sur les puissances
$$E_n=\sum_{k=0}^{n}2^{2k}=\sum_{k=0}^{n}(2^2)^k\underset{2^2\neq 1}{=}\frac{1-(2^2)^{n+1}}{1-2}=(2^2)^{n+1}-1=2^{2n+2}-1$$

$\boxed{F_n}$:
$$F_n=1-3+3^2-3^3+\cdots+(-1)^n3^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k3^k=\sum_{k=0}^{n}(-3)^k\underset{-3\neq 1}{=}\frac{1-(-3)^{n+1}}{1-(-3)}=\frac{1-(-3)^{n+1}}{4}$$

$\boxed{G_n}$: La somme C_n est bien une somme de termes géométriques de raison 3. En factorisant par le premier terme, on a

$$G_n = 2\times 3^2 + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + \cdots + 2\times 3^n = 2.3^2\left[1+3+3^2+\cdots+3^{n-2}\right] \underset{3\neq 1}{=} 2.3^2\times\frac{1-3^{(n-2)+1}}{1-3} = 2.3^2\times\frac{3^{n-1}-1}{2} = 9(3^{n-1}-1)$$

$\boxed{H_n}$: Pour la somme D_n, on procède comme pour la somme C_n

$$\begin{aligned} H_n &= -8\times 7^2 + 8\times 7^3 - 8\times 7^4 + \cdots + 8\times 7^{2005} - 8\times 7^{2006} = -8\times 7^2\left[1-7+7^2+\cdots-7^{2003}-7^{2004}\right] \\ &= -8\times 7^2\times\frac{1-(-7)^{2004+1}}{1-(-7)} \quad (-7\neq 1) = -8\times 7^2\times\frac{1-(-7)^{2005}}{8} = -7^2\times(1+7^{2005}) \quad ((-7)^{2005} = -7^{2005}) \end{aligned}$$

$\boxed{I_n}$:

$$I_\alpha = \sum_{\alpha=0}^{n}\frac{3}{10^\alpha} = 3\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{1}{10^\alpha} = 3\sum_{\alpha=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^\alpha \underset{1/10\neq 1}{=} 3\times\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = 3\times\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{9}{10}} = 3\times\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right) = \frac{10}{3}\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

$\boxed{J_n}$:

$$J_n = \sum_{i=0}^{2n} 3\times 4^{i+1} = \sum_{i=0}^{2n} 3\times 4\times 4^i = 3\times 4\sum_{i=0}^{2n}4^i \underset{12\neq 1}{=} 3\times 4\times\frac{1-4^{2n+1}}{1-4} = 3\times 4\times\frac{4^{2n+1}-1}{3} = 4(4^{2n+1}-1)$$

$\boxed{K_n}$:

$$K_n = \sum_{j=0}^{n}\frac{5\times 2^j}{3^{j+1}} = \sum_{j=0}^{n}\frac{5}{3}\times\frac{2^j}{3^j} = \frac{5}{3}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^j \underset{2/3\neq 1}{=} \frac{5}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] = 5\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$\boxed{L_N}$:

$$L_N = \sum_{i=0}^{N+1}3^{2i+1} = \sum_{i=0}^{N+1}(3^2)^i\times 3 = 3\sum_{i=0}^{N+1}9^i \underset{9\neq 1}{=} 3\times\frac{1-9^{(N+1)+1}}{1-9} = \frac{3}{8}\left(9^{N+2}-1\right)$$

$\boxed{M_n}$:

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^p = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right] \\ &= \frac{1}{9}\sum_{p=0}^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^p \underset{1/3\neq 1}{=} \frac{1}{9}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-2)+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}\times\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

$\boxed{N_n}$:

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=3}^{n+1}\frac{2^k}{3^{k+2}} = \sum_{k=3}^{n+1}\frac{2^k}{3^k\times 3^2} = \frac{1}{3^2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{3^2}\sum_{k=3}^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3^2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{3^2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right] = \frac{2^3}{3^5}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{2/3\neq 1}{=} \frac{2^2}{3^5}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{(n-2)+1}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2^2}{3^4}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

$\boxed{O_N}$:

$$\begin{aligned} O_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(5\times 2^n + 2\times 3^{2n}\right) = 5\sum_{n=1}^{N}2^n + 2\sum_{n=1}^{N}(3^2)^n = 5\left[2+2^21+\cdots+2^N\right] + 2\left[3^2+(3^2)^2+\cdots+(3^2)^N\right] \\ &= 5\times 2\left[1+2+\cdots+2^{N-1}\right] + 2\times 3^2\left[1+(3^2)+\cdots+(3^2)^{N-1}\right] = 10\times\frac{1-2^{(N-1)+1}}{1-2} + 18\times\frac{1-(3^2)^{(N-1)+1}}{1-3^2} \\ &= 10\left[2^N-1\right] + \frac{18}{8}\left[9^N-1\right] = 10\left[2^N-1\right] + \frac{9}{4}\left[9^N-1\right] = 10\times 2^N + \frac{9^{N+1}}{4} - \frac{49}{4} \end{aligned}$$

$\boxed{P_k}$:

$$\begin{aligned}P_k &= \sum_{n=3}^{2k} 2^{3n+1} \times \frac{3^{n+1}}{4^n} = \sum_{n=3}^{2k} 2 \times 3 \times \frac{(2^3)^n \times 3^n}{4^n} = 6 \sum_{n=3}^{2k} \left(\frac{2^3 \times 3}{4}\right)^n = 6 \sum_{n=3}^{2k} 6^n = 6\left[6^3 + 6^4 + \cdots + 6^{2k}\right] \\ &= 6 \times 6^3 \left[1 + 6 + \cdots + 6^{2k-3}\right] = 6^4 \times \frac{1 - 6^{(2k-3)+1}}{1-6} = \frac{6^4}{5}\left[6^{2k-2} - 1\right]\end{aligned}$$

correction de l'exercice 4

Comme nous l'indique l'énoncé, on effectue une vérification rapide

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} &= \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)} \\ \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} &= \frac{(k+2)(k+1) - 2k(k+2) + k(k+1)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k^2+3k+2) - (2k^2+4k) + (k^2+k)}{k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{2}{k(k+1)(k+2)} \Rightarrow \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \underset{j=k+1}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Les indices communs à ces deux sommes forment l'ensemble $\{2, .., n\}$ et, pour $n \geqslant 2$, la relation de Chasles nous donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left[\frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right] - \left[\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}}$:

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} + \sum_{p=3}^{n+2} \frac{1}{p} \quad (j = k+1, \quad p = k+2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

Les indices communs aux trois sommes forment l'ensemble $\{3, .., n\}$ et, pour $n \geqslant 3$, la relation de Chasles nous donne

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right] - 2\left[\frac{1}{2} + \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1}\right] + \left[\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right] \\ &= 1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\end{aligned}$$

correction de l'exercice 5

Nous allons déterminer les trois réels a, b, c par identification

$$\frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} = \frac{ak(k+1) + b(k-1)(k+1) + c(k-1)k}{(k-1)k(k+1)} = \frac{k^2(a+b+c) + k(a-c) - b}{k(k^2-1)}$$

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1} \Leftrightarrow k - 5 = k^2(a+b+c) + k(a-c) - b$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b+c=0 \\ a-c=1 \\ -b=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+c=-5 \\ a-c=1 \\ b=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cc} 2a=-4 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -2c=6 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ b=5 & \end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=-2 \\ c=-3 \\ b=5 \end{array}\right.$$

Nous pouvons alors calculer la somme demandée

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{k-5}{k(k^2-1)} &= \sum_{k=2}^{n}\left[-\frac{2}{k-1}+\frac{5}{k}-\frac{3}{k+1}\right]=-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}+5\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}\\ &= -2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}+5\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}-3\sum_{j=3}^{n+1}\frac{1}{j}\quad (i=k-1,\quad j=k+1)=-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+5\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Les indices communs aux trois sommes forment l'ensemble $\{3,..,n-1\}$ et, pour $n\geqslant 3$, la relation de Chasles nous donne

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{k-5}{k(k^2-1)} &= -2\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right]+5\left[\frac{1}{2}+\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n}\right]-3\left[\left(\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right]\\ &= -2\times\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{5}{n}-\frac{3}{n}-\frac{3}{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}\end{aligned}$$

correction de l'exercice 6

Pour la somme de gauche, nous allons distribuer la multiplication, ensuite utiliser la linéaire du symbole somme, puis utiliser un changement de variable $j=k+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}k(a_k-a_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1}ka_k-ka_{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}ka_k-\sum_{k=0}^{n-1}ka_{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}ka_k-\sum_{j=1}^{n}(j-1)a_j\quad (j=k+1)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}ka_k-\sum_{k=1}^{n}(k-1)a_k=\sum_{k=0}^{n-1}ka_k-\left(\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}ka_k-\sum_{k=1}^{n}ka_k+\sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

Les indices communs aux trois sommes forment l'ensemble $\{1,..,n-1\}$ et la relation de Chasles nous donne

$$\sum_{k=0}^{n-1}k(a_k-a_{k+1})=\left(0\times a_0+\sum_{k=1}^{n-1}ka_k\right)-\left(\left[\sum_{k=1}^{n-1}ka_k\right]+na_n\right)+\sum_{k=1}^{n}a_k=-na_n+\sum_{k=1}^{n}a_k$$

correction de l'exercice 7

$\boxed{\text{a)}}$ On pose $(\mathcal{P}_n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation $n=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}k=0$ et $\dfrac{0(0+1)}{2}=0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1}k=\frac{(n+1)([n+1]+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1}k=\left[\sum_{k=0}^{n}k\right]+[n+1]\underset{(\mathcal{P}_n)}{=}\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right]=(n+1)\left[\frac{n+2}{2}\right]=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\boxed{\text{b)}}$ On pose $(\mathcal{P}_n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation $n=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}k^2=0^2=0$ et $\dfrac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}=0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^2=\frac{(n+1)([n+1]+1)(2[n+1]+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \left[\sum_{k=0}^{n} k^2\right] + [n+1]^2 \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] \\ &= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right] = (n+1)\left[\frac{2n^2+7n+6}{6}\right]\end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat attendu, il suffit de vérifier l'égalité $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$. Je laisse le soin au lecteur de développer le membre de gauche. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)\left[\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right] = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\boxed{\text{c)}}$ On pose $(\mathcal{P}_n) : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Initialisation $n=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0^3 = 0$ et $\left[\dfrac{0(0+1)}{2}\right]^2 = 0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ et montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left[\frac{[n+1]([n+1]+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \left[\sum_{k=0}^{n} k^3\right] + [n+1]^3 \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\ &= (n+1)^2\left[\frac{n^2+4(n+1)}{4}\right] = (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right] = (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\boxed{\text{d)}}$ Soit $q \neq 1$. On pose $(\mathcal{P}_n) : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Initialisation $n=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1$ et $\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q} = \dfrac{1-q}{1-q} = 1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left[\sum_{k=0}^{n} q^k\right] + \left[q^{n+1}\right] \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\boxed{\text{e)}}$ On pose $(\mathcal{P}_n) : \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$

Initialisation $n=0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2\times 0+1 = 1$ et $(0+1)^2 = 1^2 = 1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$ et montrons que

$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = ([n+1]+1)^2 = (n+2)^2$.

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \left[\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\right] + [2(n+1)+1] \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} (n+1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\boxed{\text{f)}}$: On pose $(\mathcal{P}_n)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Initialisation $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ et montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{[n+1]}{[n+1]+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right] + \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{n+1}\left[n + \frac{1}{n+2}\right] = \frac{1}{n+1}\left[\frac{n(n+2)+1}{n+2}\right] = \frac{1}{n+1}\left[\frac{n^2+2n+1}{n+2}\right] \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\frac{(n+1)^2}{n+2}\right] = \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\boxed{\text{g)}}$ On pose $(\mathcal{P}_n)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k.2^{k-1} = n.2^{n+1} + 1$

Initialisation $n = 0$: $\sum_{k=1}^{0+1} k.2^{k-1} = \sum_{k=1}^{1} k.2^{k-1} 1 \times 2^{1-1} = 1$ et $0 \times 2^{0+1} + 1 = 1$ donc $\sum_{k=1}^{0+1} k.2^{k-1} = 0 \times 2^{0+1} + 1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\sum_{k=1}^{n+1} k.2^{k-1} = n.2^{n+1} + 1$ et montrons que

$$\sum_{k=1}^{(n+1)+1} k.2^{k-1} = (n+1)2^{(n+1)+1} + 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n+2} k.2^{k-1} = (n+1)2^{n+2} + 1$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+2} k.2^{k-1} &= \left[\sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1}\right] + (n+2)2^{(n+2)-1} \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} \left[n.\underline{2^{n+1}} + 1\right] + (n+2)\underline{2^{n+1}} = 2^{n+1}[n+n+2] + 1 = 2^{n+1}[2n+2] + 1 \\
&= 2^{n+1}.2(n+1) + 1 = 2^{n+2}(n+1) + 1
\end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\boxed{\text{h)}}$ On fixe un réel a positif. On pose $(\mathcal{P}_n)$: $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

Initialisation $n = 0$: $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ ce qui entraine l'inégalité $(1+a)^0 \geqslant 1 + 0 \times a$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large !!) donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ et montrons que

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$$

Pour commencer, rappelons que l'on suppose $n \geqslant 2$.

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \underset{(\mathcal{P}_n)}{\geqslant} (1+a)(1+na) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + \underbrace{a^2}_{\geqslant 0} \geqslant 1 + (n+1)a$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\boxed{\text{i)}}$ On pose $(\mathcal{P}_n)$: $n! \geqslant 2 \times 3^{n-2}$

Initialisation $n=2$: $2!=2$ et $2\times 3^{2-2}=2\times 1=2$ donc $2!\geqslant 2\times 3^{2-2}$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large !!) donc $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $n!\geqslant 2\times 3^{n-2}$ et montrons que $(n+1)!\geqslant 2\times 3^{(n+1)-2}=2\times 3^{n-1}$. Pour commencer, rappelons que l'on suppose $n\geqslant 2$.

$$(n+1)!=(n+1)\times n! \underset{(\mathcal{P}_n)}{\geqslant} (n+1)\times 2\times 3^{n-2} \underset{n\geqslant 2}{\geqslant} (2+1)\times 2\times 3^{n-2}=3\times 2\times 3^{n-2}=2\times 3^{n-1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

$\boxed{\text{j)}}$ On pose $(\mathcal{P}_n)$: $\dfrac{3^n}{n!}\leqslant\dfrac{1}{2^{n-7}}$

Initialisation $n=5$: Pour commencer, on a $\dfrac{3^5}{5!}=\dfrac{81}{40}$ et $\dfrac{1}{2^{5-7}}=\dfrac{1}{2^{-2}}=2^2=4$. donc $\dfrac{3^5}{5!}\leqslant\dfrac{1}{2^{5-7}}$ donc $(\mathcal{P}_5)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\dfrac{3^n}{n!}\leqslant\dfrac{1}{2^{n-7}}$ et montrons que $\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant\dfrac{1}{2^{(n+1)-7}}=\dfrac{1}{2^{n-6}}$. Pour commencer, rappelons que l'on suppose $n\geqslant 5$.

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{3^n}{n!}\times\frac{3}{n+1}\underset{(\mathcal{P}_n)}{\leqslant}\frac{1}{2^{n-7}}\times\frac{3}{n+1}\underset{n\geqslant 5}{\leqslant}\frac{1}{2^{n-7}}\times\frac{3}{5+1}=\frac{1}{2^{n-7}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{n-7+1}}=\frac{1}{2^{n-6}}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.