correction de l'exercice 1

$\boxed{\text{Suite } a}$: Il s'agit d'une suite géométrique de raison -2 donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^{\times}, \quad a_k = (-2)^{k-1} a_1 = 7(-2)^k}$$

$\boxed{\text{Suite } b}$: Il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puisque $b_n = \frac{1}{2} b_{n-1}$ donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = \frac{3}{2^n}}$$

$\boxed{\text{Suite } c}$: Il s'agit d'une suite arithmétique de raison 3 puisque $c_{p+1} = c_p + 3$ donc

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad c_p = 3p + c_0 = 3p + 10}$$

$\boxed{\text{Suite } d}$: Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique.
Recherche de la constante L :

$$L = \frac{L}{3} + 4 \Leftrightarrow \frac{2}{3} L = 4 \Leftrightarrow L = \frac{3}{2} \times 4 = 6$$

On introduit alors la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = d_n - 6 \Leftrightarrow d_n = u_n + 6$
On a alors :

$$u_{n+1} = d_{n+1} - 6 = \frac{d_n}{3} + 4 - 6 = \frac{u_n + 6}{3} - 2 = \frac{u_n}{3}$$

La suite u est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ ce qui permet d'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{3^n} u_0 \Leftrightarrow d_n - 6 = \frac{1}{3^n}(d_0 - 6) \Leftrightarrow \boxed{d_n = 6 - \frac{5}{3^n}}$$

$\boxed{\text{Suite } e}$: Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique puisque $e_{i+1} = \frac{1}{4} e_i - \frac{1}{4}$.
Recherche de la constante L :

$$L = \frac{L}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} L = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow L = -\frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

On introduit alors la suite u définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad u_i = e_i - (-\frac{1}{3}) = e_i + \frac{1}{3} \Leftrightarrow e_i = u_i - \frac{1}{3}.$$

On a alors :

$$u_{i+1} = e_{i+1} + \frac{1}{3} = \frac{e_i}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{u_i - \frac{1}{3}}{4} + \frac{1}{12} = \frac{u_i}{4}$$

La suite u est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ ce qui permet d'écrire

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad u_i = \frac{1}{4^i} u_0 \Leftrightarrow e_i + \frac{1}{3} = \frac{1}{4^i}(e_0 + \frac{1}{3}) \Leftrightarrow \boxed{e_i = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4^i \times 3}}$$

$\boxed{\text{Suite } f}$: Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique puisque $f_{j+1} = \frac{2}{3} f_j + \frac{1}{3}$.
Recherche de la constante L :

$$L = \frac{2L}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} L = \frac{1}{3} \Leftrightarrow L = 1$$

On introduit alors la suite u définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad u_j = f_j - 1 \Leftrightarrow f_j = u_j + 1.$$

On a alors :

$$u_{j+1} = f_{j+1} - 1 = \frac{2}{3} f_j + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}(u_j + 1) + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3} u_j$$

La suite u est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ ce qui permet d'écrire

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad u_j = \left(\frac{2}{3}\right)^j u_0 \Leftrightarrow f_j - 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^j (f_0 - 1) \Leftrightarrow \boxed{f_j = 1}$$

$\boxed{\text{Suite } h}$: Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Equation caractéristique : $2x^2 + x - 1 = 0$ dont les racines sont $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$ c'est-à-dire $x \in \left\{-1, \dfrac{1}{2}\right\}$.

Par conséquent, il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h_n = \alpha(-1)^n + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Détermination de α et β :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(-1)^0 + \beta\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = h_0 \\ \alpha(-1)^1 + \beta\left(\dfrac{1}{2}\right)^1 = h_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + \dfrac{1}{2}\beta = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = -1 \\ \dfrac{3}{2}\beta = 2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = -1 \\ \beta = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi, la suite h est définie par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad h_n = -(-1)^n + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

$\boxed{\text{Suite } l}$: Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Equation caractéristique : $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ dont les racines sont $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ c'est-à-dire $x \in \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Par conséquent, il existe deux réels α et β tels que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad l_m = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

Détermination de α et β :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^0 + \beta\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = l_0 \\ \alpha\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \beta\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = l_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha + \beta = 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\beta = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 2 \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\beta = 2 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{5}\alpha = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{5}\beta = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \beta = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

Ainsi, la suite l est définie par :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad l_m = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m + \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m.}$$

correction de l'exercice 2

1. Si $w_n = an + b$ pour tout entier n et w satisfait à la relation de récurrence $w_{n+1} = 2w_n + b$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a(n+1) + b = 2(an+b) + n \Leftrightarrow an + a + b = (2a+1)n + 2b$$

En utilisant le principe d'identification, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} a = 2a + 1 \\ a + b = 2b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = -1 \\ b = -1 \end{array}\right.$$

Par conséquent, la suite w est définie par
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = -n-1}$$

2. Pour tout entier n, on a
$$\begin{aligned} z_{n+1} &= u_{n+1} + (n+1) + 1 = u_{n+1} + n + 2 = (2u_n + n) + n + 2 \\ &= 2u_n + 2n + 2 = 2(u_n + n + 1) = 2z_n \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On a ainsi montré que : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = 2z_n}$$

3. La suite z est géométrique de raison 2 et en remarquant que $z_n = u_n + n + 1$, on peut écrire
$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}, \quad z_n = 2^n z_0 \Leftrightarrow u_n + n + 1 = 2^n(u_0 + 0 + 1) \\ &\Leftrightarrow \quad u_n + n + 1 = 2^n \Leftrightarrow \boxed{u_n = 2^n - n - 1} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 3

1. Un calcul direct montre que pour tout entier k, on a
$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = (3\alpha_k + \beta_k) + (2\alpha_k + 4\beta_k) = 5\alpha_k + 5\beta_k = 5(\alpha_k + \beta_k) = 5z_k \\ t_{k+1} &= 2\alpha_k - \beta_k = 2(3\alpha_k + \beta_k) - (2\alpha_k + 4\beta_k) = 4\alpha_k - 2\beta_k = 2(2\alpha_k - \beta_k) = 2t_k \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{la suite } z \text{ est géométrique de raison 5 et la suite } t \text{ est géométrique de raison 2}}$$

2. On en déduit que pour tout entier k, on a
$$\begin{cases} z_k = 5^k z_0 \\ t_k = 2^k t_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_k + \beta_k = 5^k(3\alpha_0 + \beta_0) \\ 2\alpha_k - \beta_k = 2^k(2\alpha_0 - \beta_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha_k + \beta_k = 5 \times 5^k \\ 2\alpha_k - \beta_k = 5 \times 2^k \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha_k = 5 \times 5^k + 5 \times 2^k \\ -5\beta_k = 15 \times 2^k - 10 \times 5^k \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha_k = 5^k + 2^k \\ \beta_k = 2 \times 5^k - 3 \times 2^k \end{cases}}$$

correction de l'exercice 4

1. Un calcul direct montre que pour tout entier p, on a
$$\alpha_{p+1} = \frac{u_{p+1}}{5^{p+1}} = \frac{2u_p + 5^p}{5 \times 5^p} = \frac{2}{5} \times \frac{u_p}{5^p} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}\alpha_p + \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\alpha_{p+1} = \frac{2}{5}\alpha_p + \frac{1}{5}}$$

2. La suite α est arithmético-géométrique.
Recherche de la constante L :
$$L = \frac{2}{5}L + \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{5}L = \frac{1}{5} \Leftrightarrow L = \frac{1}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$
On introduit alors la suite v définie par :
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad v_p = \alpha_p - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \alpha_p = v_p + \frac{1}{3},$$
ce qui nous donne
$$v_{p+1} = \alpha_{p+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}\alpha_p + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}\alpha_p - \frac{2}{15} = \frac{2}{5}(v_p + \frac{1}{3}) - \frac{2}{15} = \frac{2}{5}v_p$$
La suite v est donc géométrique de raison $\frac{2}{5}$. On en déduit que
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad v_p = \left(\frac{2}{5}\right)^p v_0 \Leftrightarrow \alpha_p - \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{5}\right)^p (\alpha_0 - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow \boxed{\alpha_p = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^p (\alpha_0 - \frac{1}{3})}$$
On obtient ainsi l'expression de u_p en fonction de p
$$\begin{aligned} \frac{u_p}{5^p} &= \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^p \left(\frac{u_0}{5^0} - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow u_p = \frac{1}{3} \times 5^p + 5^p \times \left(\frac{2}{5}\right)^p \left(u_0 - \frac{1}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \boxed{u_p = \frac{1}{3} \times 5^p + 2^p \left(u_0 - \frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 5

1. Un calcul direct nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = (2u_n - v_n) + (u_n + 4v_n) = 3u_n + 3v_n = 3(u_n + v_n) = 3p_n$$

$$\boxed{\text{la suite } p \text{ est géométrique de raison } 3}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = 3^n p_0 = 3^n(u_0 + v_0) = 3^n(2-1) = 3^n \Rightarrow \boxed{p_n = 3^n}$$

2. Toujours en effectuant un calcul direct, on obtient

$$v_{n+1} = u_n + 4v_n = (u_n + v_n) + 3v_n = p_n + 3v_n = 3^n + 3v_n \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = 3v_n + 3^n}$$

3. Un calcul direct nous fournit les égalités suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{3v_n + 3^n}{3 \times 3^n} = \frac{v_n}{3^n} + \frac{1}{3} = z_n + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{La suite } z \text{ est arithmétique de raison } \frac{1}{3}}$$

ce qui implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \frac{1}{3} \times n + z_0 = \frac{n}{3} + \left(\frac{v_0}{3^0}\right) = \frac{n}{3} - 1 \rightarrow \boxed{z_n = \frac{n}{3} - 1}$$

4. En utilisant la question précédente ainsi que l'égalité $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{v_n}{3^n} = \frac{n}{3} - 1 \Leftrightarrow v_n = \frac{n}{3} \times 3^n - 3^n \Leftrightarrow \boxed{v_n = n3^{n-1} - 3^n}$$

D'autre part, les égalités $p_n = u_n + v_n$ et $p_n = 3^n$ (qui résulte de la question 1) nous permettent d'écrire

$$u_n + v_n = 3^n \Leftrightarrow u_n + n \times 3^{n-1} - 3^n = 3^n \Leftrightarrow \boxed{u_n = 2 \times 3^n - n \times 3^{n-1}}$$

correction de l'exercice 6

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in \mathbb{R}_+$.
Initialisation $n = 0$: d'après l'énoncé, on a $u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n \geqslant 0$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$.
Puisque l'on a $u_{n+1} = \dfrac{\overbrace{3u_n + 1}^{\geqslant 0}}{\underbrace{2u_n + 4}_{>0}}$ (comme somme de réels positifs), on en déduit que u_{n+1} est également positif (quotient de deux positifs), ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. Un calcul direct nous donne

$$t_{n+1} = \frac{2u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{2\left(\dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}\right) - 1}{\left(\dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}\right) + 1} = \frac{\dfrac{(6u_n + 2) - (2u_n + 4)}{2u_n + 4}}{\dfrac{(3u_n + 1) + (2u_n + 4)}{2u_n + 4}} = \frac{4u_n - 2}{2u_n + 4} \times \frac{2u_n + 4}{5u_n + 5} = \frac{2(u_n - 1)}{5(u_n + 1)} = \frac{2}{5} t_n$$

ce qui montre que la suite t est bien géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

3. Il est alors immédiat que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n t_0 \Leftrightarrow \frac{2u_n - 1}{u_n + 1} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \left(\frac{2u_0 - 1}{u_0 + 1}\right) \Leftrightarrow \frac{2u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \quad 2u_n - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n (u_n + 1) \Leftrightarrow u_n \left[2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 1}{2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$$

Puisque $\dfrac{2}{5} \in]-1, 1[$, la suite $\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right]_n$ tend vers 0 et la suite u tend vers $\dfrac{1}{2}$.

correction de l'exercice 7

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n > 0$.
Initialisation $n = 0$: d'après l'énoncé, on a $u_0 > 0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.
Puisque la racine carré d'un réel strictement positif est strictement positive, il est immédiat que $u_{n+1} = e\underbrace{\sqrt{u_n}}_{>0} > 0$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. $t_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln(e\sqrt{u_n}) = \ln e + \ln(u_n^{1/2}) = 1 + \dfrac{1}{2}\ln u_n = 1 + \dfrac{1}{2}t_n$.

3. Recherche de la constante L :
$$L = 1 + \frac{L}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}L = 1 \Leftrightarrow L = 2 \times 1 = 2$$
On introduit alors la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = t_n - 2 \Leftrightarrow t_n = v_n + 2$
On a alors :
$$v_{n+1} = t_{n+1} - 2 = 1 + \frac{1}{2}t_n - 2 = \frac{1}{2}(v_n + 2) - 1 = \frac{v_n}{2}$$
La suite v est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ ce qui permet d'écrire
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 \Leftrightarrow t_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (t_0 - 6) \Leftrightarrow t_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n (\ln u_0 - 2) \Leftrightarrow u_n = \exp\left[2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n (\ln u_0 - 2)\right]$$
Puisque $\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$, la suite $\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]_n$ tend vers 0 donc la suite u tend vers $\exp(2) = e^2$.

correction de l'exercice 8

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$
Initialisation $n = 0$: d'après l'énoncé, on a $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que ($u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$) et montrons que ($u_{n+1} > 0$ et $u_{n+2} > 0$).
Pour commencer, d'après l'hypothèse $(\mathcal{P}_n)$, on sait que $u_{n+1} > 0$. Ensuite, puisque $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est la racine d'un produit de deux réels strictement positif, il est immédiat que $u_{n+2} > 0$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. $w_{n+2} = \ln u_{n+2} = \ln\sqrt{u_n u_{n+1}} = \ln(u_n u_{n+1})^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln(u_n u_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\ln u_n + \dfrac{1}{2}\ln u_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n + \dfrac{1}{2}w_{n+1}$.

3. **Equation caractéristique** : $x^2 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = 0$ dont les racines sont $x = \dfrac{1/2 \pm \sqrt{9/4}}{2} = \dfrac{1/2 \pm 3/2}{2}$ c'est-à-dire $x \in \left\{-\dfrac{1}{2}, 1\right\}$.
Par conséquent, il existe deux réels α et β tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \alpha(1)^n + \beta\left(\frac{-1}{2}\right)^n = \alpha + \beta\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$
Détermination de α et β :
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = w_0 \\ \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = w_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = w_0 \\ \alpha - \frac{1}{2}\beta = w_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\alpha = w_0 + 2w_1 \\ -\frac{3}{2}\beta = w_1 - w_0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{w_0 + 2w_1}{3} \\ \beta = -\frac{2}{3}(w_1 - w_0) \end{array}\right.$$
Ainsi, la suite w est définie par :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{w_0 + 2w_1}{3} - \frac{2}{3}(w_1 - w_0)\left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$$
Puisque $-\dfrac{1}{2} \in]-1, 1[$, la suite $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0 donc la suite w tend vers
$$\frac{w_0 + 2w_1}{3} = \frac{\ln u_0 + 2\ln u_1}{3} = \frac{\ln(u_0 u_1^2)}{3} = \ln\left[(u_0 u_1^2)^{1/3}\right]$$

4. Etant donné que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \exp w_n$, la suite u converge vers $\exp\ln\left[(u_0 u_1^2)^{1/3}\right] = (u_0 u_1^2)^{1/3}$.