correction de l'exercice 1

1. $\underline{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t}$: Pour cela, on introduit les fonctions $f : t \mapsto \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$ et $g : t \mapsto t - \ln(1+t)$ définies sur $[0,+\infty[$ et on étudie leurs variatiosn respectives sur cet intervalle puis on en déduit le signe (si l'on a de la chance)
   Ces deux fonctions sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et l'on a
   $$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(1+t)'}{1+t} - \frac{(t)'(1+t) - t(1+t)'}{(1+t)^2} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{1+t-1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} \\ g'(t) &= 1 - \frac{(1+t)'}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \end{aligned}$$
   Par conséquent, les dérivées de ces deux fonctions sont positives sur $[0,+\infty[$ et les fonctions f et g sont croissantes sur cet intervalle. Etant donné que $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que les fonctions f et g sont positives sur $[0,+\infty[$, ce qui démontre l'encadrement demandé.
   $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ \dfrac{a}{1+\frac{a}{n}} \leqslant \ln u_n \leqslant a}$: Puisque l'on a $\ln u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)$ puis en utilisant l'encadrement précédent pour $t = \dfrac{a}{n}$ et en le multipliant par n (qui est positif), on a
   $$\frac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} \leqslant \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \leqslant \frac{a}{n} \underset{\times n}{\Leftrightarrow} \frac{a}{1+\frac{a}{n}} \leqslant n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \leqslant a \Leftrightarrow \frac{a}{1+\frac{a}{n}} \leqslant \ln u_n \leqslant a$$
2. Puisque l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a}{1+\frac{a}{n}} = a$, le théorème d'encadrement peut être appliqué à l'encadrement de la question précédente, ce qui montre que la suite $(\ln u_n)_n$ converge vers a donc, en passant à l'exponentielle, la suite $(u_n)_n$ converge vers e^a.

correction de l'exercice 2

$\boxed{\text{Suite } a}$: On utilise une relation de Chasles (même terme mais sur des ensembles d'indices distincts)
$$a_{n+1} - a_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \left(\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right] + \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$$
donc la suite a est strictement croissante.
$\boxed{\text{Suite } b}$: On utilise également une relation de Chasles pour les sommes
$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}\right) = \left(\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right] + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$
donc la suite b est strictement décroissante
$\boxed{\text{Suite } c}$: Encore et toujours Chasles
$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \ln k - (n+1)\ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln k - n\ln n\right) = \left(\left[\sum_{k=1}^{n} \ln k\right] + \ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1)\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln k + n \\ &= -n\ln(n+1) + n\ln n = n\left[\ln n - \ln(n+1)\right] = \underbrace{n}_{\geqslant 0} \overbrace{\ln(\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leqslant 1})}^{<0} \leqslant 0 \end{aligned}$$
donc la suite c est décroissante.

correction de l'exercice 3

1. $\underline{\forall n \geqslant 2,\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1}$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 1$
   Initialisation $\underline{n = 2}$: Puisque $u_2 = 1$, il est évident que $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$ donc $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   $$\left.\begin{array}{c} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 1 - \dfrac{1}{n^2} \leqslant 1 \end{array}\right\} \underset{\times}{\Rightarrow} 0 \leqslant \underbrace{u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}_{=u_{n+1}} \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Monotonie de u :

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - u_n = u_n\left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - 1\right] = -\frac{\overbrace{u_n}^{\geqslant 0}}{\underbrace{n^2}_{\geqslant 0}} \leqslant 0$$

donc la suite u est décroissante.

2. La suite u est décroissante et minorée par 0 donc elle converge (et sa limite appartient à $[0, 1]$).

3. $\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}$: On procède par récurrence en posant : $(\mathcal{P}_n) : u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}$
Initialisation $n = 2$: Puisque $u_2 = 1$ et $\dfrac{2}{2(2-1)} = 1$, on en déduit que $u_2 = \dfrac{2}{2(2-1)}$ donc $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n = \dfrac{n}{2(n-1)}$ et montrons que $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2((n+1)-1)} = \dfrac{n+1}{2n}$

$$u_{n+1} = u_n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n}{2(n-1)}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \frac{n}{2(n-1)} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
La suite u tend vers $\dfrac{1}{2}$ (la limite du quotient de deux polynômes est la limite du quotient des termes dominants).

correction de l'exercice 4

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \geqslant 1$.
Initialisation $n = 0$: Puisque $u_0 = 2$, il est évident que $u_0 \geqslant 1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n \geqslant 1$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 1$. L'inégalité suivante

$$u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1 \geqslant 2\sqrt{1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

montre que $u_{n+1} \geqslant 1$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Monotonie de la suite u : on étudie le signe de la différence $u_n - u_{n+1}$ (mais c'est pour mieux voir l'identité remarquable mon enfant :-))

$$u_n - u_{n+1} = u_n - (2\sqrt{u_n} - 1) = u_n - 2\sqrt{u_n} + 1 = (\sqrt{u_n} - 1)^2 \geqslant 0$$

ce qui montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - u_{n+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow u_n \geqslant u_{n+1}$, donc la sutie u est décroissante.

2. La suite u est décroissante et minorée par 1 donc, d'après le théorème de convergence monotone des suites, elle converge et l'on note L sa limite. La suite u étant minorée par 1, on en déduit que sa limite L est également minorée par 1, donc elle est strictement positive et la suite $\sqrt{u_n}$ converge vers $\sqrt{L}$. En outre, puisque pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} - 1$, en passant à la limite, on obtient

$$L = 2\sqrt{L} - 1 \Leftrightarrow L - 2\sqrt{L} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{L} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{L} = 1 \underset{L \geqslant 0}{\Leftrightarrow} L = 1$$

Par conséquent, la suite u converge vers 1.

correction de l'exercice 5

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Initialisation $n = 0$: Comme $u_0 = 1$, on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$, ce qui montre $(\mathcal{P}_0)$.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. En utilisant l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ ainsi que des calculs sur les inégalités, on obtient

$$0 \leqslant u_n \leqslant 2 \Rightarrow 2 \leqslant u_n + 2 \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{4} \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Soit L une limite éventuelle de la suite u. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2$, on est assuré que $0 \leqslant L \leqslant 2$ donc le réel $L + 2$ est positif et la suite $\sqrt{u_n + 2}$ converge vers $\sqrt{L + 2}$. En considérant la relation de récurrence définissant la suite u et en passant à la limite, on obtient

$$L = \sqrt{L + 2} \Rightarrow L^2 = L + 2 \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Leftrightarrow L \in \{-1, 2\}$$

Puisque $L \geqslant 0$, on en déduit que $L = 2$ et la seule limite éventuelle de la suite u est 2.

2. Le réel x appartenant à $[0,2]$, il est positif, donc on peut élever au carré en conservant l'équivalence

$$\sqrt{x+2} \geqslant x \Leftrightarrow x+2 \geqslant x^2 \Leftrightarrow 0 \geqslant x^2 - x - 2.$$

Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour racine -1 et 2 donc il est négatif entre ces deux racines, c'est-à-dire qu'il est négatif sur l'intervalle $[-1,2]$ donc sur l'intervalle $[0,2]$.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,2]$, on peut remplacer x par u_n dans l'encadrement précédent, ce qui nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\sqrt{u_n+2}}_{=u_{n+1}} \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$$

donc la suite u est croissante.

3. La suite u est croissante et majorée par 2, donc elle converge. Sa limite est alors, d'après la question 1, $L=2$ (le raisonnement étant valable car la suite u converge bien désormais)

correction de l'exercice 6

1. $\underline{\forall n \geqslant 0, \quad u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 0}$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: u_n existe et $u_n \geqslant 0$.
Initialisation $n=0$: Puisque l'énoncé affirme que $u_0 \geqslant 0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n \geqslant 0$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$. Puisque $u_n \geqslant 0$, le réel u_{n+1} est positif comme quotient de deux réels positifs (les numérateurs et dénominateurs sont des sommes de réels positifs) ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
<u>Monotonie de la suite u</u> : on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - u_n = \frac{2u_n^2 - u_n(1+5u_n)}{1+5u_n} = \frac{-3u_n^2 - u_n}{1+5u_n} \leqslant 0$$

Le réel u_n étant positif, cette différence est négative comme quotient d'un numérateur négatif et d'un dénominateur positif. Par conséquent, la suite u est décroissante.

2. La suite u est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence monotone des suites, elle converge. Si l'on note L sa limite, la suite u étant positive, on est assuré que sa limite L est également positive donc le quotient $1+5L$ est strictement positif donc il est non nul. Par conséquent, la suite $\dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ tend vers $\dfrac{2L^2}{1+5L}$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$, on en déduit que

$$L = \frac{2L^2}{1+5L} \Leftrightarrow L(1+5L) = 2L^2 \Leftrightarrow L + 5L^2 = 2L^2 \Leftrightarrow L - 3L^2 = 0 \Leftrightarrow L(1+3L) = 0 \Leftrightarrow L \in \left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$$

Etant donné que la limite L est positive, on en déduit que $L=0$ et la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

3. $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant \frac{2u_n}{5}}$: On ne procède pas par récurrence mais par un calcul direct (étant donné qu'il s'agit de deux termes consécutifs d'une même suite qui interviennent).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n = \frac{2u_n^2}{1+5u_n} - \frac{2}{5}u_n = \frac{5 \times 2u_n^2 - 2u_n(1+5u_n)}{5(1+5u_n)} = \frac{10u_n^2 - 2u_n - 10u_n^2}{5(1+5u_n)} = -\frac{2u_n}{5(1+5u_n)} \leqslant 0$$

car le réel u_n est positif pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ donc l'inégalité $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{5}$ est vraie.
$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant (\frac{2}{5})^n u_0}$: On procède par récurrence (car il s'agit d'une relation entre la suite u et une autre suite) en posant $(\mathcal{P}_n)$: $u_n \leqslant (\frac{2}{5})^n u_0$.
Initialisation $n=0$: $\left(\dfrac{2}{5}\right)^0 u_0 = u_0$ donc $u_0 \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^0 u_0$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large), ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $u_n \leqslant (\frac{2}{5})^n u_0$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant (\frac{2}{5})^{n+1} u_0$. En combinant l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ à l'inégalité $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2u_n}{5}$, on obtient

$$u_{n+1} \leqslant \frac{2u_n}{5} \leqslant \frac{2}{5}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n u_0\right] = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} u_0$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Convergence de la suite u : La positivité de la suite u (question 1) combinée à la question précédente nous montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$$

La suite géométrique $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n u_0\right]_n$ converge vers 0 car sa raison $\frac{2}{5}$ appartient à $]-1,1[$, ce qui nous permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc la suite u converge vers 0.

correction de l'exercice 7

1. $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 1$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \geqslant 1$.
Initialisation $n = 0$: Puisque $u_0 = 3$, il est évident que $u_0 \geqslant 1$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n \geqslant 1$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 1$. Pour justifier que le réel u_{n+1} est supérieur (au sens large) à 1, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - 1$ (car l'application direct des encadrements ne nous permet pas de conclure)
$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1 = \frac{u_n^2 - (2u_n - 1)}{2u_n - 1} = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1} \geqslant 0$$
car le numérateur est clairement positif et le dénominateur l'est également $(2u_n - 1 \geqslant 2 \times 1 - 1 = 1 > 0)$ donc $u_{n+1} \geqslant 1$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Monotonie de la suite u : on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n(2u_n - 1)}{2u_n - 1} = \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} \underset{u_n \geqslant 1}{=} \frac{\overbrace{u_n}^{\geqslant 0}\overbrace{(-u_n + 1)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{2u_n - 1}_{\geqslant 0}} \leqslant 0$$
donc la suite u est décroissante.

2. La suite u est décroissante et minorée par 1 donc, d'après le théorème de convergence monotone des suites, la suite u converge. Si l'on note L sa limite, on est assuré que $L \geqslant 1$ (par minoration de u_n) et la suite $2u_n - 1$ tend vers $2L - 1$ qui ne peut être nul (sinon $L = \frac{1}{2}$, ce qui est contradictoire). En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$, on obtient
$$L = \frac{L^2}{2L - 1} \Leftrightarrow L(2L - 1) = L^2 \Leftrightarrow L^2 - L = 0 \Leftrightarrow L(L - 1) = 0 \Leftrightarrow L \in \{0, 1\}$$
Puisque la limite L est nécessairement supérieure ou égale à 1, on en déduit que $L = 1$ et la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

correction de l'exercice 8

1. $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant \frac{1}{3}$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \geqslant \frac{1}{3}$.
Initialisation $n = 0$: Puisque $u_0 = 1$, il est évident que $u_0 \geqslant \frac{1}{3}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n \geqslant \frac{1}{3}$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant \frac{1}{3}$. Pour justifier l'encadrement du réel u_{n+1}, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - \frac{1}{3}$ (car l'application direct des encadrements ne nous permet pas de conclure)
$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2u_n}{3u_n + 1} - \frac{1}{3} = \frac{3 \times 2u_n - (3u_n + 1)}{3(3u_n + 1)} = \frac{3u_n - 1}{3(3u_n + 1)} = \frac{3\overbrace{\left(u_n - \frac{1}{3}\right)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{3(3u_n + 1)}_{\geqslant 0}} \geqslant 0 \quad (u_n \geqslant \frac{1}{3})$$
donc l'égalité $u_{n+1} \geqslant \frac{1}{3}$ est vraie, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
$\forall x \geqslant 1/3, \quad \frac{2x}{3x + 1} \leqslant \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$: Il suffit d'étudier le signe de la différence
$$\frac{2x}{3x + 1} - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{6(2x) - (3(3x + 1)x + (3x + 1))}{6(3x + 1)} = \frac{-9x^2 + 6x - 1}{6(3x + 1)} = -\frac{9x^2 - 6x + 1}{6(3x + 1)} = -\frac{(3x - 1)^2}{6(3x + 1)} \leqslant 0$$

lorsque $x \geqslant 0$ donc quand $x \geqslant 1/3$.
Pour ceux qui ne voient pas l'identité remarquable, il suffit de calculer le discriminant du trinôme $-9x^2+6x-1$. *Celui-ci est nulle donc le trinôme est toujours du signe de* "a"$=-6 \leqslant 0$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2}+\dfrac{1}{6}$: Puisque pour tous les entiers n, le réel u_n est supérieur ou égale à 1/3 (question 1), on peut remplacer x par u_n dans l'inégalité de la question 1, ce qui nous donneOn ne procède pas par récurrence mais par un calcul direct (étant donné qu'il s'agit de deux termes consécutifs d'une même suite qui interviennent).
$$\underbrace{\frac{2u_n}{3u_n+1}}_{=u_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{2}+\frac{1}{6} \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}+\frac{1}{6}$$
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}$: On procède par récurrence (car il s'agit d'une relation entre la suite u et une autre suite) en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \leqslant \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}$.
Initialisation $n=0$: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 2^{0-1}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 2^{-1}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}=1$ et $u_0=1$ donc $u_0 \leqslant \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 2^{0-1}}$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large), ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $u_n \leqslant \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}$ et montrons que $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 2^n}$. En combinant l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$ à l'inégalité $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{2}+\dfrac{1}{6}$, on obtient
$$u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}+\frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^{n-1}}\right]+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3\times 2\times 2^{n-1}}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^n}$$
ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

3. En combinant les encadrements issus des questions 1 et 2, on obtient l'encadrement suivant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{3\times 2^{n-1}}$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[u_n \leqslant \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\times 2^{n-1}}\right]=\dfrac{1}{3}$, le théorème d'encadrement nous montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\dfrac{1}{3}$.

correction de l'exercice 9

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n > 0$.
Initialisation $n=0$: Puisque $u_0>0$, il est évident que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n>0$ et montrons que $u_{n+1}>0$. Puisque $u_n>0$, on est assuré de l'existence de $\dfrac{1}{u_n}$ (donc de l'existence de u_{n+1}) et de la stricte positivité de $\dfrac{1}{u_n}$. La somme de deux réels strictement positifs est un réel strictement positif donc u_{n+1} est strictement positif, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{u_n}>0$, on en déduit que la suite u est strictement croissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^2 \geqslant 2n+u_0^2$: On pose $(\mathcal{P}_n) : u_n^2 \geqslant 2n+u_0^2$
Initialisation $n=0$: $2\times 0+u_0^2=u_0^2$ donc $u_0^2 \geqslant 2\times 0+u_0^2$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large), ce qui montre $(\mathcal{P}_0)$
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $u_n^2 \geqslant 2n+u_0^2$ et montrons que $u_{n+1}^2 \geqslant 2(n+1)+u_0^2$.
$$u_{n+1}^2=\left(u_n+\frac{1}{u_n}\right)^2=u_n^2+2+\frac{1}{u_n^2} \underset{(\mathcal{P}_n)}{\geqslant} 2n+u_0^2+2+\underbrace{\frac{1}{u_n^2}}_{\geqslant 0} \geqslant 2n+2+u_0^2=2(n+1)+u_0^2$$
ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: L'inégalité précédente combinée au fait que u_n soit positive nous montre que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{2n+u_0^2}$$
et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2n+u_0^2}=+\infty$, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

correction de l'exercice 10
Etudions pour commencer la monotonie de ces deux suites

$$\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\left[\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\right]-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}\geqslant 0\\
b_{n+1}-b_n &= a_{n+1}+\frac{1}{(n+1)[(n+1)!]}-a_n-\frac{1}{n\times n!}=a_{n+1}-a_n+\frac{1}{(n+1)^2\times n!}-\frac{1}{n\times n!}\\
&= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)^2\times n!}-\frac{1}{n\times n!}=\frac{1}{(n+1)\times n!}+\frac{1}{(n+1)^2 n!}-\frac{1}{n\times n!}\\
&= \frac{n\times(n+1)+n-(n+1)^2}{n\times(n+1)^2\times n!}=\frac{-1}{n\times(n+1)^2\times n!}\leqslant 0
\end{aligned}$$

donc la suite a est croissante et la suite b est décroissante. Ensuite, il est immédiat que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\times n!}=0$ donc les suites a et b sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite.
Remarque : *on peut montrer, par exemple en utilisant le calcul intégral, que la limite est le célèbre nombre e.*

correction de l'exercice 11

1. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0<u_n<v_n$.
Initialisation $n=0$: puisque $u_0=a$ et $v_0=b$ avec $0<a<b$, on en déduit que $0<u_0<v_0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire, supposons que $0<u_n<v_n$ et montrons que $0<u_{n+1}<v_{n+1}$.
Pour commencer, puisque u_n et v_n sont strictement positifs, le réel u_{n+1} existe et est strictement positif (produit, somme et quotient de strictement positif est strictement positif). Ensuite, on a
$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}-\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}=\frac{(u_n+v_n)^2-4u_nv_n}{2(u_n+v_n)}=\frac{u_n^2-2u_nv_n+v_n^2}{2(u_n+v_n)}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$$
Par conséquent, la différence $v_{n+1}-u_{n+1}$ est évidemment positive mais également non nul car les réels u_n et v_n sont distincts $(u_n<v_n)$ donc $v_{n+1}>u_{n+1}$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

2. Les monotonies souhaitées découlent des calculs suivants
$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}-u_n=\frac{2u_nv_n-u_n(u_n+v_n)}{u_n+v_n}=\frac{u_nv_n-u_n^2}{u_n+v_n}=\frac{\overbrace{u_n}^{>0}\overbrace{(v_n-u_n)}^{>0}}{\underbrace{u_n+v_n}_{>0}}>0\\
v_{n+1}-v_n &= \frac{u_n+v_n}{2}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}<0
\end{aligned}$$

3. $\underline{v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{v_n-u_n}{2}}$: La première majoration découle de l'égalité obtenu à la question 1
$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}=\frac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)}=\frac{v_n-u_n}{2}\times\frac{v_n-u_n}{u_n+v_n}$$
Puisque le numérateur v_n-u_n est clairement inférieur au dénominateur u_n+v_n, le quotient $\frac{v_n-u_n}{u_n+v_n}$ est inférieur (au sens largeà à 1 et comme il est positif, on en déduit que
$$v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{v_n-u_n}{2}$$
$\underline{v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)}$: Ensuite, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$
Initialisation $n=0$: $\left(\frac{1}{2}\right)^0(v_0-u_0)=v_0-u_0$ donc $v_0-u_0\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^0(v_0-u_0)$ (l'égalité impliquant l'inégalité au sens large) et $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons que $v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$ et montrons que $v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(v_0-u_0)$. En utilisant l'inégalité $v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{v_n-u_n}{2}$ et l'hypothèse $(\mathcal{P}_n)$ nous donne
$$v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}(v_n-u_n)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(v_0-u_0)$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
$\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)}$: L'inégalité précédente combinée au fait que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n<v_n$ nous montre que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0<v_n-u_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)$$

Puisque le réel $\frac{1}{2}$ appartient à $]-1,1[$, la suite géométrique $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n(v_0-u_0)\right]_n$ tend vers 0, ce qui permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

4. La suite u est croissante, la suite v est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ donc les suites u et v sont adjacentes, ce qui impliquent qu'elles convergent vers la même limite.
5. Un calcul direct nous donne
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}v_{n+1}=\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}\times\frac{u_n+v_n}{2}=u_nv_n$$
donc la suite (u_nv_n) est constante et cette constante est égale à $u_0v_0=ab$, c'est-à-dire
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_nv_n=ab$$
Si l'on note L la limite commune à u et v et en passant à la limite dans l'égalité précédente, on en déduit que $L^2=ab$ donc $L=\pm\sqrt{ab}$. Puisque les suites u et v sont positives, on en déduit que la limite L est également positive donc $L=\sqrt{ab}$.