correction de l'exercice 1

1. a) au moins une des deux cartes tirées n'est pas rouge.
   b) La réalisation des évènements A et B impliquent que les deux cartes tirées sont un valet rouge et un dix rouge. D'autre part, la réalisation de $\overline{C}$ implique qu'au moins une des deux cartes tirées n'est pas un personnage, ce qui est le cas car on a pioché une dix.
   Par conséquent, la réalisation de l'évènement $A \bigcap B \bigcap \overline{C}$ est équivalente à la pioche d'un valet rouge et d'un dix rouge.
   c) La réalisation de $A \bigcap \overline{C}$ signifie que l'on a pioché deux cartes rouges dont au moins une n'est pas un personnage. Ensuite, la réalisation de l'évènement $B \bigcap \overline{C}$ signifie que l'on a pioché un valet et un dix (La condition $\overline{C}$ étant redondante car l'évènement B est réalisé).
   Par conséquent, La réalisation de $(A \bigcap \overline{C}) \bigcap (B \bigcap \overline{C})$ signifie l'on a pioché un valet rouge et un dix rouge
   d) L'évènement $(A \bigcap B) \bigcap C$ est impossible car la réalisation de $(A \bigcap B)$ implique la pioche d'un valet rouge et d'un dix rouge tandis que la réalisation de C implique la pioche de deux personnages, ce qui est contradictoire avec $A \cap B$.

2. $F = C \cap \overline{A}$ et $G = \overline{C}$

correction de l'exercice 2

1. Les tirages possibles forment l'ensemble suivant
$$\{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,3\},\{3,4\},\{4,4\}\}$$
   $A = \{\{2,2\},\{2,4\},\{4,4\}\}$Donner tous les tirages possibles.
   Pour la suite, on note A= { les deux jetons sont pairs}.

2. $\overline{A} = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,3\},\{3,4\}\}$
   $A \cup \overline{A} = \{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,3\},\{3,4\},\{4,4\}\}$
   $A \bigcap \overline{A} = \emptyset$

3. $\overline{C} = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\},\{3,4\}\}$
   $A \bigcup C = \{\{1,1\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,2\},\{2,4\},\{3,3\},\{4,4\}\}$
   $A \cap C = \{\{2,2\},\{2,4\},\{4,4\}\}$
   $A \cup \overline{C} = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{4,4\}\}$
   $A \bigcap \overline{C} = \emptyset$

correction de l'exercice 3

1. $\mathcal{A} = A \backslash (B \cup C)$

2. $\mathcal{B} = (A \cap B) \backslash C$

3. $\mathcal{C} = \overline{A \cap B \cap C}$

4. $\mathcal{D} = [(A \cap B) \backslash C] \cup [(A \cap C) \backslash B] \cup [(B \cap C) \backslash A] \cup [A \cap B \cap C]$

correction de l'exercice 4

1. (a) $\underbrace{(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4)}_{\text{3 Piles}}$
   $\cup \underbrace{(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4)}_{\text{4 Piles}}$

   (b) $\underbrace{(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4)}_{\text{2 faces sucessifs}}$
   $\cup \underbrace{(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4)}_{\text{3 faces successifs}} \cup \underbrace{(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4)}_{\text{4 faces successifs}}$

   (c) $\underbrace{(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4)}_{\text{0 face}}$
   $\cup \underbrace{(F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4)}_{\text{1 face}}$
   $\cup \underbrace{(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4)}_{\text{2 faces}}$

   (d) $\underbrace{(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4)}_{\text{0 Face}} \cup \underbrace{(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4)}_{\text{1 Face}} \cup \underbrace{(P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4)}_{\text{2 Faces}}$
   $\cup \underbrace{(P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4)}_{\text{3 Faces}} \cup \underbrace{(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4)}_{\text{4 Faces}}$

2. (a) $A_1 = P_1, \quad B_2 = F_1 \cap F_2, \quad A_3 = F_1 \cap P_2 \cap P_3, \quad B_4 = F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4$
$A_5 = F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap P_5, \quad B_6 = F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap F_5 \cap F_6$
$A_{2k+1} = (F_1 \cap P_2) \cap (F_3 \cap P_4) \cap \cdots \cap (F_{2k-1} \cap P_{2k}) \cap P_{2k+1}$
$B_{2k+2} = (F_1 \cap P_2) \cap (F_3 \cap P_4) \cap \cdots \cap (F_{2k-1} \cap P_{2k}) \cap F_{2k+1} \cap F_{2k+2}$

(b) i. A_5 (il lance trois fois la pièce donc il gagne quand la pièce a été lancé 5 fois en tout)
ii. $\emptyset$ (si B fait trois lancers, alors la pièce aura été lancée en tout 6 fois, ce qui est impossible)
iii. $A_1 \cup B_2 \cup A_3$
iv. $A_1 \cup A_3 \cup A_5$
v. $\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{A_5}$
vi. $A_1 \cup B_2 \cup A_3 \cup B_4 \cup A_5$

correction de l'exercice 5
On note A l'ensemble des personnes étudiant l'anglais, D l'ensemble des personnes étudiant l'allemand, E l'ensemble des personnes étudiant l'espagnol.
L'énoncé nous donne les informations suivantes

$$|A| = 31, \quad |E| = 24, \quad |D| = 17, \quad |A \cap D| = 12, \quad |E \cap D| = 9, \quad |A \cap D \cap E| = 4, \quad |A \cup D \cup E| = 38$$

a) Il s'agit de calculer $|A \cap D|$, ce qui est aisé en utilisant la formule du crible de Poincarré

$$\underbrace{|A \cup D \cup E|}_{=38} = \underbrace{|A|}_{=31} + \underbrace{|D|}_{=17} + \underbrace{|E|}_{=24} - \underbrace{|A \cap D|}_{=12} - |A \cap E| - \underbrace{|D \cap E|}_{=9} + \underbrace{|A \cap D \cap E|}_{=4} \quad \Leftrightarrow |A \cap E| = 55 - 38 = 17$$

Par conséquent, il y a 17 personnes qui étudient l'anglais et l'espagnol.
b) Il s'agit de calculer $|A \cup E|$, ce qui est assez simple

$$|A \cup E| = |A| + |E| - |A \cap E| = 31 + 24 - 17 = 38$$

Par conséquent, tout élève de la classe étudie soit l'anglais, soit l'espagnol. Par conséquent, aucun élève ne peut étudier que l'allemand.. On retrouve également le résultat par un calcul direct (en calculant $|D \backslash (A \cup E)|$)

$$|D \backslash (A \cup E)| = |D| - |D \cap (A \cup E)| = |D| - [|D| + |A \cup E| - |D \cup (A \cup E)|] = |D \cup A \cup E)| - |A \cup E| = 38 - 38 = 0$$

correction de l'exercice 6
On note A (resp. B, resp. C) l'ensemble des personnes ayant voté pour le candidat A, (resp. B, C).
Les données de l'énoncé sont

$$\begin{aligned} |A| &= 282, \quad |A \cap B| = 117, \quad |A \cap C| = 105, \quad |A \cap B \cap C| = 79, \\ |(B \cap C) \backslash A| &= 117, \quad |C \backslash (A \cup B)| = 27, \quad |B \backslash A| = 133 \end{aligned}$$

1. a) Il s'agit de calculer $|A \backslash B|$
$$|A \backslash B| = |A| - |A \cap B| = 282 - 117 = 165$$
b)
$$|B \backslash A| = |B| - |B \cap A| \Leftrightarrow |B| = |B \backslash A| + |B \cap A| = 133 + 117 = 250$$
c)
$$\begin{aligned} |(B \cap C) \backslash A| &= |B \cap C| - |B \cap C \cap A| \Leftrightarrow 117 = |B \cap C| + 79 \Leftrightarrow |B \cap C| = 38 \\ |C \backslash (A \cup B)| &= |C| - |C \cap (A \cup B)| = |C| - |(C \cap A) \cup (C \cap B)| = |C| - [|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|] \\ |C| &= |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| + |C \backslash (A \cup B)| = 105 + 38 - 79 + 27 = 91 \end{aligned}$$

2. On commence par calculer le nombre de parlementaires ayant voté pour l'un des trois à l'aide de la formule du crible de Poincarré.

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 282 + 250 + 91 - 117 - 105 - 38 + 79 = 442 \\ \left|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right| &= \left|\overline{A \cup B \cup C}\right| = 470 - 442 = 28 \end{aligned}$$

Par conséquent, 28 parlementaires n'ont voté pour aucun des trois candidats A,B,C.