correction de l'exercice 1

1. La pioche est sans remise (donc on ne peut avoir deux fois la même boule physique) et l'ordre ne joue aucun rôle donc on utilise les combinatoires.

   (a) $P(E\cap F) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{13}{4}} = \dfrac{\dfrac{3\times 2}{2\times 1}\times\dfrac{4\times 3}{2\times 1}}{\dfrac{13\times 12\times 11\times 10}{4\times 3\times 2\times 1}} = \dfrac{18}{715}$

   Justification du calcul de probabilités : *Cette probabilité se calcule directement par réinterprétation. Pour les cas favorables, on choisit 2 boules blanches parmi les 3 boules blanches (* $\binom{3}{2}$ *choix) et 2 boules rouges parmi les 4 boules rouges (* $\binom{4}{2}$ *choix) et pour les cas possibles, on choisit 4 boules parmi les 13 disponibles (* $\binom{13}{4}$ *choix)*

   (b) $P_F(E) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{11}{2}} = \dfrac{\dfrac{3\times 2}{2\times 1}}{\dfrac{11\times 10}{2\times 1}} = \dfrac{3}{55}$

   Justification du calcul de probabilités : *Cette probabilité se calcule directement par réinterprétation. L'évènement F est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement E, c'est-à-dire que l'on pioché 2 boules rouges et on souhaite piocher 2 boules blanches au final. Autrement dit, il reste à piocher 2 boules parmi les 11 boules restantes (6 étant noires, 3 blanches et 2 rouges, et on veut que ces deux boules soient blanches. Pour les cas favorables, on choisit 2 boules blanches parmi les 3 boules blanches (* $\binom{3}{2}$ *choix) et pour les cas possibles, on choisit 2 boules parmi les 11 disponibles (* $\binom{11}{2}$ *choix)*

   Remarque : *on peut également calculer directement cette probabilité conditionnelle en utilisant la formule mathématique (même s'il est indispensable, en général, de réinterpréter la probabilité conditionnelle afin de la calculer directement)*

$$P_F(E) = \frac{P(F\cap E)}{P(F)} = \frac{\dfrac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{13}{4}}}{\dfrac{\binom{4}{2}\binom{11}{2}}{\binom{13}{4}}} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{3}{55}$$

   Le seul point non évident est $P(F)$. Pour les cas favorables, on choisit 2 rouges parmi les 4 possibles ($\binom{4}{2}$ *choix possibles) ainsi que 2 boules non rouges parmi les 9 boules non rouges (* $\binom{9}{2}$ *choix possibles)*

   (c) $P_E(F) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{11}{2}} = \dfrac{\dfrac{4\times 3}{2\times 1}}{\dfrac{11\times 10}{2\times 1}} = \dfrac{6}{55}$

   Justification du calcul de probabilités : *Cette probabilité se calcule directement par réinterprétation. L'évènement E est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement F, c'est-à-dire que l'on pioché 2 boules blanches et on souhaite piocher 2 boules rouges au final. Autrement dit, il reste à piocher 2 boules parmi les 11 boules restantes, 6 étant noires, 1 blanches et 4 rouges, et on veut que ces deux boules soient rouges. Pour les cas favorables, on choisit 2 boules rouges parmi les 4 boules rouges (* $\binom{4}{2}$ *choix) et pour les cas possibles, on choisit 2 boules parmi les 11 disponibles (* $\binom{11}{2}$ *choix)*

   Remarque : *on peut également calculer directement cette probabilité conditionnelle en utilisant la formule mathématique (même s'il est indispensable, en général, de réinterpréter la probabilité conditionnelle afin de la calculer directement)*

$$P_E(F) = \frac{P(E\cap F)}{P(E)} = \frac{\dfrac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{13}{4}}}{\dfrac{\binom{3}{2}\binom{11}{2}}{\binom{13}{4}}} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{55}$$

   Le seul point non évident est $P(E)$: On veut 2 blanches au sens large (2 ou plus). Pour les cas favorables, on choisit 2 blanches parmi les 3 possibles ($\binom{3}{2}$ *choix possibles) ainsi que 2 boules quelconques parmi les 11 restantes (* $\binom{11}{2}$ *choix possibles)*

   Les évènements E et F sont dépendants car

$$\left.\begin{array}{l} P(E) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{11}{2}}{\binom{13}{4}} = \dfrac{3}{13} \\ P(F) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{11}{2}}{\binom{13}{4}} = \dfrac{6}{13} \\ P(E\cap F) = \dfrac{18}{715} \end{array}\right\} \Rightarrow P(E\cap F) \neq P(E)P(F)$$

2. On conserve les même notations qu'à la question 1 en ajoutant les évènements B_k : " obtenir une boule blanche à la k-ième pioche" et R_k : " obtenir une boule rouge à k-ième pioche ". En effet, l'ordre intervient dans cette question, non pas dans le "résultat" final mais dans la nature même de l'expérience (le fait que deux boules peuvent être identiques induit nécessairement l'existence d'un ordre). Comme d'habitude, pour ne pas alourdir les notations, on conviendra de noter B pour B_k et R pour R_k

   (a)

$$\begin{aligned} P(E\cap F) &= P(BBRR\cup BRBR\cup BRRB\cup RBBR\cup RBRB\cup RRBB) \quad \text{(union disjointe)} \\ &= P(BBRR)+p(BRBR)+p(BRRB)+p(RBBR)+p(RBRB)+p(RRBB) \quad \text{(les évènements } R \text{ et } B \text{ so} \\ &= \frac{3}{13}\times\frac{3}{13}\times\frac{4}{13}\times\frac{4}{13}+\frac{3}{13}\times\frac{4}{13}\times\frac{3}{13}\times\frac{4}{13}+\cdots = 6\times\left(\frac{3}{13}\right)^2\left(\frac{4}{13}\right)^2 \end{aligned}$$

   (b) Pour la probabilité conditionnelle, on ne peut effectuer d'interprétation car, pour effectuer les calculs par interprétation, il est indispensable de savoir quand a lieu l'obtention des blanches et des rouges. Par conséquent, on est obligé d'utiliser la formule mathématique définissant la probabilité conditionnelle
   Remarque : *Etant donné que l'on ne peut, en aucun cas, avoir une formule du type $P_{X\cup Y}(E) = P_X(E)+P_Y(E)$ lorsque X et Y sont disjoints (l'application $X\mapsto P_X(E)$ n'est pas une probabilité), il sera* <u>définitivement</u> *impossible de réinterpréter toute probabilité conditionnelle $P_F(E)$ lorsque l'évènement F devra être considérer comme une union, disjointe ou non, d'évènements, c'est-à-dire que le calcul de $P_F(E)$ par réinterprétation amènera à la considération de plusieurs sous cas dans " l'évènement F "*

$$\begin{aligned} P_F(E) &= \frac{P(F\cap E)}{P(F)} = \frac{6\times\left(\frac{3}{13}\right)^2\left(\frac{4}{13}\right)^2}{1-\left[P(\overline{RRRR})+P(R\overline{RRR})+P(\overline{R}R\overline{RR})+P(\overline{RR}R\overline{R})+P(\overline{RRR}R)\right]} \\ &= \frac{6\times\left(\frac{3}{13}\right)^2\left(\frac{4}{13}\right)^2}{1-\left[\left(\frac{9}{13}\right)^4+4\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{9}{13}\right)^3\right]} = \frac{27}{323} \end{aligned}$$

   Justification des calculs de probabilités : *Le seul point concerne le calcul de $P(F)$. Si l'on souhaite expliciter les différentes possibilités pour F, on est amené à regarder de très nombreuses configurations (selon s'il y a 2, 3 ou 4 boules rouges). Par contre, la description de $\overline{F}$ est plus aisée puisqu'il n'y a que les cas avec 0 rouge et 1 rouge à considérer.*

   (c) Pour les mêmes raisons qu'à la question 2.c., on utilise la formule mathématique et la justification des calculs de probabilités est identique.

$$\begin{aligned} P_E(F) &= \frac{P(E\cap F)}{P(E)} = \frac{6\times\left(\frac{3}{13}\right)^2\left(\frac{4}{13}\right)^2}{1-\left[P(\overline{BBBB})+P(B\overline{BBB})+P(\overline{B}B\overline{BB})+P(\overline{BB}B\overline{B})+P(\overline{BBB}B)\right]} \\ &= \frac{6\times\left(\frac{3}{13}\right)^2\left(\frac{4}{13}\right)^2}{1-\left[\left(\frac{10}{13}\right)^4+4\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{10}{13}\right)^3\right]} = \frac{32}{243} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 2
Une urne contient 20 boules dont 8 boules noires, 7 boules rouges et 5 boules blanches. On pioche sans remise 4 boules.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A "obtenir exactement deux boules blanches "
   (b) B "obtenir au moins une boule blanche "
   (c) C "obtenir autant de boules blanches que de boules rouges"
   (d) D "obtenir aucune boule noire "

2. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes
   $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_A(C)$, $P_C(A)$, $P_A(D)$, $P_D(A)$,
   $P_B(C)$, $P_C(B)$, $P_B(D)$, $P_D(B)$, $P_D(C)$, $P_C(D)$

3. Refaire l'exercice en supposant que l'on pioche avec remise.

correction de l'exercice 3
Une étude statistique sur le sexe des bébés a montré que sur 100 naissances, 52 bébés sont des garçons et 48 sont des filles. On suppose que les évènements "accoucher d'un garçon" et "accoucher d'une fille" sont indépendants. Virginie a eu 4 bébés.

1. Calculer la probabilité que Virginie ait
   (a) autant de garçons que de filles
   (b) un seul garçon.
   (c) un seul garçon sachant que son premier bébé est une fille.
   (d) un seul garçon sachant que son premier bébé est un garçon
   (e) un seul garçon sachant que son deuxième bébé est une fille.
2. On suppose que Virginie a eu 2 garçons et 2 filles et que son premier bébé est une fille. Calculer la probabilité pour que
   (a) le deuxième bébé soit une fille
   (b) le dernier bébé soit une fille.
   (c) le dernier bébé soit un garçon
   Le fait que premier bébé de Virginie soit une fille est-il indépendant du fait que Virginie ait exactement 2 garçons ?

correction de l'exercice 4
On dispose d'une urne contenant 20 boules dont 8 noires, 7 rouges et 5 blanches. On pioche, au hasard et sans remise, cinq boules. Calculer la probabilité de piocher

1. que des boules d'une même couleur.
2. que des boules blanches sachant que toutes les boules sont d'une même couleur
3. deux boules d'une couleur et trois boules d'une autre couleur
4. trois boules blanches sachant que l'on obtient les trois couleurs
   Refaire l'exercice lorsqu'il y a remise

correction de l'exercice 5
Un archer tire sur une cible située à 20 m et une cible située à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (resp. q) avec $q < p$. On suppose que les tirs indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement.
Calculer la probabilité de gagner en commencer par la cible située à 20 m (resp. située à 50 m). Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

correction de l'exercice 6
On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face. On effectue 5 lancers. Calculer la probabilité des évènements suivants
A "on obtient 2 piles"   B "on obtient 3 piles"   C "face n'est jamais suivi de face"

correction de l'exercice 7
On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et d'obtenir "face" est $q = 1 - p$ ($p \in]0; 1[$). "pile" (resp. "face") sera noté P (resp. F). Soit A_n l'évènement "la séquence PF apparait pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n".
Calculer $P(A_n)$ lorsque (a) $n = 3$ (b) $n = 4$ (c) $n = 5$ (d) n quelconque.

correction de l'exercice 8
On lance n fois consécutives une pièce. La probabilté d'obtenir "face" est p.
Calculer la probabilité qu'au cours des n lancers "face" ne soit jamais suivi de "face" lorsque a) $n = 3$ b) $n = 4$,   c) $n = 5$ d) $n \in \mathbb{N}^{\times}$.