correction de l'exercice 1
On introduit les évènements suivants :

$$R_k : \text{" la } k^{ième} \text{ boule piochée est rouge " et } V_k : \text{" la } k^{ième} \text{ boule piochée est verte "}$$

k appartenant à $\{1, 2, 3\}$ (par exemple, V_2 : " la $2^{ième}$ boule piochée est verte ")

1. L'évènement " obtenir deux boules vertes " est l'évènement $V_1 \cap V_2$, on doit calculer $P(V_1 \cap V_2)$. L'évènement $V_1 \cap V_2$ ne peut être réinterprété et il n'est pas impossible, donc on utilise la formule de conditionnement :
$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P_{V_1}(V_2)$$
Puisque la première boule piochée l'est dans la première urne qui contient 4 boules rouges et 3 boules vertes, et la probabilité de piocher une boule verte dans la première urne est $\dfrac{3}{4+3} = \dfrac{3}{7}$ donc la probabilité que la première boule soit verte est $P(V_1) = \dfrac{3}{7}$.
Pour calculer la probabilité conditionnelle $P_{V_1}(V_2)$, on procède par interprétation. On a déjà piochée une boule verte dans la première urne (car V_1 est réalisé) donc la seconde boule piochée l'est dans la seconde urne contenant 5 boules rouges et 3 boules vertes. La probabilité conditionnelle $P_{V_1}(V_2)$ est la probabilité de piocher une boule verte dans la seconde urne est $\dfrac{3}{5+3} = \dfrac{3}{8}$ donc $P_{V_1}(V_2) = \dfrac{3}{8}$. On en déduit que
$$P(V_1 \cap V_2) = P(V_1)P_{V_1}(V_2) = \frac{3}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{56} \simeq 0.161 \pm 10^{-3}$$
$$\boxed{\text{On a environ 16.1 \% de chance pour que les deux boules soient vertes}}$$
L'évènement " obtenir deux boules rouges " est l'évènement $R_1 \cap R_2$, on on doit calculer $P(R_1 \cap R_2)$ L'évènement $R_1 \cap R_2$ ne peut être réinterprété et il n'est pas impossible, donc on utilise la formule de conditionnement :
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)$$
Puisque la première boule piochée l'est dans la première urne qui contient 4 boules rouges et 3 boules vertes, et la probabilité de piocher une boule rouge dans la première urne est $\dfrac{4}{4+3} = \dfrac{4}{7}$ donc la probabilité que la première boule soit rouge est $P(R_1) = \dfrac{4}{7}$.
Pour calculer la probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$, on procède par interprétation. On a déjà piochée une boule rouge dans la première urne (car R_1 est réalisé) donc la seconde boule piochée l'est dans la première urne qui contient 4 boules rouges et 3 boules vertes. La probabilité conditionnelle $P_{R_1}(R_2)$ est la probabilité de piocher une boule rouge dans la première urne est $\dfrac{4}{4+3} = \dfrac{4}{7}$ donc $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{4}{7}$. On en déduit que
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{16}{49} \simeq 0.327 \pm 10^{-3}$$
$$\boxed{\text{On a environ 32.7 \% de chance pour que les deux boules soient rouges}}$$

2. Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle $P_C(D)$, où C et D sont les évènements :
$$\text{D : " les deux boules sont rouges " et C : " les deux boules sont de même couleur "}$$
A priori, la réinterprétation de cette probabilité conditionnelle n'est pas possible donc on utilise la formule classique
$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{P(D)}{P(C)}$$
(les deux boules sont rouges et les deux boules sont de même couleur signifie que les deux boules sont rouges)
Ensuite, il est aisé de voir que $D = R_1 \cap R_2$ et $C = (V_1 \cap V_2) \cup (R_1 \cap R_2)$, cette dernière union étant disjointe, on a
$$P_C(D) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(V_1 \cap V_2) + P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{16}{49}}{\frac{9}{56} + \frac{16}{49}} = \frac{128}{191} \simeq 0.67 \pm 10^{-2}$$
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a environ 67 \% de chance pour que les deux boules soient toutes} \\ \text{les deux rouges sachant qu'elles ont toutes les deux la même couleur.}\end{array}}$$

3. **Première méthode** : On constate que le contraire de l'évènement

E " obtenir une boule verte et une boule rouge "

est l'évènement

$(R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)$: " obtenir deux boules rouges ou deux boules vertes "

donc

$$P(E) = 1 - P\left[(R_1 \cap R_2) \cup (V_1 \cap V_2)\right] \underset{\text{union disjointe}}{=} 1 - P(R_1 \cap R_2) - P(V_1 \cap V_2) = 1 - \frac{9}{56} - \frac{16}{49} = \frac{201}{392} \simeq 0.513 \pm 10^{-3}$$

$\boxed{\text{On a environ 51.3 \% de chance pour obtenir une boule verte et une boule blanche.}}$

Deuxième méthode : l'évènement

E " obtenir une boule verte et une boule rouge "

signifie que la première boule est verte et la seconde rouge ou la première boule est rouge et la seconde est verte, c'est-à-dire que

$$P(E) = P\left[(V_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap V_2)\right] \underset{\text{union disjointe}}{=} P(V_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap V_2)$$

On ne peut réinterpréter ces deux probabilités d'intersection donc on utilise pour chacune d'entre elles la formule de conditionnement

$$P(E) = P(V_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap V_2) = P(V_1)P_{V_1}(R_2) + P(R_1)P_{R_1}(V_2) = \frac{3}{7} \times \frac{5}{8} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{201}{392}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :
$P(V_1)$ *: Puisque la première boule piochée l'est dans la première urne qui contient* 4 *boules rouges et* 3 *boules vertes, et la probabilité de piocher une boule verte dans la première urne est* $\frac{3}{4+3} = \frac{3}{7}$ *donc* $P(V_1) = \frac{3}{7}$
$P_{V_1}(R_2)$ *: On procède par interprétation. On a déjà piochée une boule verte dans la première urne (car* V_1 *est réalisé) donc la seconde boule piochée l'est dans la deuxième urne qui contient* 5 *boules rouges et* 3 *boules vertes. La probabilité conditionnelle* $P_{V_1}(R_2)$ *est la probabilité de piocher une boule rouge dans la deuxième urne est* $\frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$ *donc* $P_{V_1}(R_2) = \frac{5}{8}$.
$P(R_1)$ *: Puisque la première boule piochée l'est dans la première urne qui contient* 4 *boules rouges et* 3 *boules vertes, et la probabilité de piocher une boule rouge dans la première urne est* $\frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$ *donc* $P(R_1) = \frac{4}{7}$
$P_{R_1}(V_2)$ *: On procède par interprétation. On a déjà piochée une boule rouge dans la première urne (car* R_1 *est réalisé) donc la seconde boule piochée l'est dans la première urne qui contient* 4 *boules rouges et* 3 *boules vertes. La probabilité conditionnelle* $P_{V_1}(R_2)$ *est la probabilité de piocher une boule verte dans la première urne est* $\frac{3}{4+3} = \frac{3}{7}$ *donc* $P_{V_1}(R_2) = \frac{3}{7}$.

correction de l'exercice 2

1. On note

A : " obtenir le 6 en un lancer "

Le fait d'obtenir le 6 dépend si l'on a le dé pipé ou le dé non pipé. On introduit alors l'évènement

P : " le dé est pipé " et $\overline{P}$: " le dé est non pipé "

La famille $(P, \overline{P})$ est un système complet et la formule des probabilités totale nous donne donc

$$P(A) = P(P \cap A) + P(\overline{P} \cap A) = P(P)P_P(A) + P(\overline{P})P_{\overline{P}}(A) = \frac{25}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{75}{100} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$\boxed{\text{On a 25 \% de chance pour obtenir un 6.}}$

Justification des calculs de probabilités :
$P(P)$ *et* $P(\overline{P})$ *: il y a 25 dés pipés et 75 non pipés donc la probabilité de choisir un dé pipé parmi les 100 dés est* $\frac{25}{100} = P(P)$ *et celui de choisir un dé non pipé parmi les 100 dés est* $\frac{75}{100} = P(\overline{P})$.

$P_P(A)$: l'évènement P est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A, c'est-à-dire que l'on a choisi un dé pipé et on souhaite obtenir le 6 avec dé pipé. La probabilité conditionnelle $P_P(A)$ est la probabilité d'obtenir le 6 avec un dé pipé donc $P_P(A) = \dfrac{1}{2}$

$P_{\overline{P}}(A)$: l'évènement $\overline{P}$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A, c'est-à-dire que l'on a choisi un dé non pipé et on souhaite obtenir le 6 avec un dé non pipé. La probabilité conditionnelle $P_{\overline{P}}(A)$ est la probabilité d'obtenir le 6 avec un dé non pipé (tous les numéros ont la même probabilité d'apparition) donc $P_{\overline{P}}(A) = \dfrac{1}{6}$

2. Il s'agit donc de calculer la probabilité conditionnelle $P_A(P)$. Cette probabilité conditionnelle ne peut se calculer par interprétation donc on utilise la formule la définissant

$$P_A(P) = \frac{P(A \cap P)}{P(A)} = \frac{P(P)P_P(A)}{P(A)} = \frac{\frac{25}{100} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\boxed{\text{On a 50 \% de chance que le dé soit pipé si l'on a obtenu un 6.}}$$

3. Il s'agit encore d'une probabilité conditionnelle qui est, si B désigne l'évènement " obtenir un 2 ", $P_B(\overline{P})$. Aucune réinterprétation n'étant possible, on procède comme précédemment, ce qui nous donne

$$P_B(\overline{P}) = \frac{P(B \cap \overline{P})}{P(B)} = \frac{P(\overline{P})P_{\overline{P}}(B)}{P(B)}$$

Il s'agit maintenant de calculer la probabilité conditionnelle $P_{\overline{P}}(B)$ ainsi que les probabilités $P(B)$ et $P(\overline{P})$.

$P(\overline{P})$: puisqu'il y a 75 dés non pipés et 25 pipés, on a $P(\overline{P}) = \dfrac{75}{100}$.

$P_{\overline{P}}(B)$: l'évènement $\overline{P}$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B, c'est-à-dire que l'on a choisi un dé non pipé et on souhaite obtenir le 2 avec un dé non pipé. La probabilité conditionnelle $P_{\overline{P}}(B)$ est la probabilité d'obtenir le 2 avec un dé non pipé (tous les numéros sont équiprobables) donc $P_{\overline{P}}(B) = \dfrac{1}{6}$.

$P(B)$: Le fait d'obtenir le 2 dépend du fait de choisir un dé pipé ou un dé non pipé. Pour cela, on considère les évènements P et $\overline{P}$ qui forment un système complet et la formule des probabilités totales nous donnent

$$P(B) = P(P \cap B) + P(\overline{P} \cap B) = P(P)P_P(B) + P(\overline{P})P_{\overline{P}}(B) = \frac{25}{100} \times \frac{1}{10} + \frac{75}{100} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{20}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :

Les probabilités $P(P)$, $P(\overline{P})$ et $P_{\overline{P}}(B)$ ont déjà été calculées auparavant.

$P_P(B)$: l'évènement P est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B, c'est-à-dire que l'on a choisi un dé pipé et l'on souhaite obtenir le 2 avec un dé pipé. La probabilité conditionnelle $P_P(B)$ est la probabilité d'obtenir le 2 avec un dé pipé. On sait que la probabilité d'obtenir le 6 avec un dé pipé est de $\dfrac{1}{2}$ et que les 5 autres numéros (1,2,3,4,5) sont équiprobables. Si on note p leur probabilité commune, on a

$$1 = \underbrace{p}_{n^\circ 1} + \underbrace{p}_{n^\circ 2} + \underbrace{p}_{n^\circ 3} + \underbrace{p}_{n^\circ 4} + \underbrace{p}_{n^\circ 5} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 5p \Leftrightarrow p = \frac{1}{10},$$

ce qui implique que la probabilité d'obtenir le 2 avec un dé pipé est $\dfrac{1}{10}$ donc $P_P(B) = \dfrac{1}{10}$.

Nous déduisons des calculs précédents que

$$P_B(\overline{P}) = \frac{P(\overline{P})P_{\overline{P}}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{75}{100} \times \frac{1}{6}}{\frac{3}{20}} = \frac{5}{6} \simeq 0.833 \pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{On a environ 83,33 \% de chance d'avoir un dé non pipé si l'on a obtenu le 2.}}$$

correction de l'exercice 3

<u>Probabilité d'obtenir 3 boules blanches</u> :

On considère naturellement A l'évènement défini par :

A : " obtenir 3 boules blanches à la fin de l'expérience "

Le nombre total de boules piochées dépendant du fait si l'on a ou non obtenu des boules blanches. Dans un premier temps, on serait tenté d'introduire le système complet d'évènements $(B, \overline{B})$, où B est l'évènement " obtenir au moins une boule blanche ".
Mais si l'on y regarde de plus près, on voit que le fait d'obtenir au final exactement 3 boules blanches, dépendant du fait que l'on a obtenu 0,1,2 ou 3 boules blanches lors des trois premières pioches.
On introduit par conséquent le système complet d'évènements (B_0, B_1, B_2, B_3), où B_k est l'évènement

B_k : " obtenir exactement k boules blanches lors de la première pioche de trois boules "

La formule des probabilités totales nous donne

$$P(A) = P(B_0 \cap A) + P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$$

L'évènement B_0 signifie que l'on a obtenu aucune boule blanche lors de la première série de pioche, donc on ne peut piocher aucune autre boule. Ceci implique que l'expérience s'arrête à l'issue de la première série de pioche et l'on a aucune boule blanche à la fin de l'expérience. En particulier, on ne peut obtenir trois boules blanches à l'issue de l'expérience et l'évènement $B_0 \cap A$ est impossible donc $P(B_0 \cap A) = 0$.
Par contre, les évènements $B_1 \cap A$, $B_2 \cap A$ et $B_3 \cap A$ sont possibles. On ne peut calculer directement leurs probabilités respectives, ce qui nous amène à utiliser la formule de conditionnement

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A)$$

Début des calculs intermédiaires :
$\boxed{P(B_1)}$ *: on pioche trois boules sans remise (et il n'y a pas d'ordre) parmi 7 boules (* $\binom{7}{3}$ *choix possibles de tirages) et l'on souhaite obtenir exactement une blanche, c'est-à-dire que l'on choisit 1 blanche parmi les 4 blanches (* $\binom{4}{1}$ *choix) et 2 noires parmi les 3 noires (* $\binom{3}{2}$ *choix) donc* $P(B_1) = \dfrac{\binom{4}{1} \times \binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{12}{35}$

$\boxed{P(B_2)}$ *: on pioche trois boules sans remise (et il n'y a pas d'ordre) parmi 7 boules (* $\binom{7}{3}$ *choix possibles de tirages) et l'on souhaite obtenir exactement deux blanches, c'est-à-dire que l'on choisit 2 blanche parmi les 4 blanches (* $\binom{4}{2}$ *choix) et 1 noires parmi les 3 noires (* $\binom{3}{1}$ *choix) donc* $P(B_2) = \dfrac{\binom{4}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{18}{35}$

$\boxed{P(B_3)}$ *: on pioche trois boules sans remise (et il n'y a pas d'ordre) parmi 7 boules (* $\binom{7}{3}$ *choix possibles de tirages) et l'on souhaite obtenir exactement trois blanches, c'est-à-dire que l'on choisit 3 blanches parmi les 4 blanches (* $\binom{4}{3}$ *choix) et 0 noires parmi les 3 noires (* $\binom{3}{0}$ *choix) donc* $P(B_3) = \dfrac{\binom{4}{3} \times \binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} = \dfrac{4}{35}$

$\boxed{P_{B_1}(A)}$ *: l'évènement B_1 est réalisé et l'on souhaite que l'évènement A se réalise, c'est-à-dire que l'on a obtenu une boule blanche et deux boules noires lors de la première série (on ne repose pas les boules dans l'urne et on repioche trois boules) et que l'on doit avoir à la fin de l'expérience exactement 3 boules blanches.*
Autrement dit, la probabilité conditionnelle $P_{B_1}(A)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et une boule noire en piochant avec remise trois boules dans l'urne qui contient désormais 4 boules dont 3 blanches et 1 noire. Dans cette nouvelle urne, la probabilité de piocher une blanche est de $\dfrac{3}{4}$ *et une noire de* $\dfrac{1}{4}$.
Cela revient à dire que l'on obtient BBN ou BNB ou NBB, ces derniers évènements étant deux à deux disjoints, on a

$$P_{B_1}(A) = P(BBN) + P(BNB) + P(NBB)$$

Remarque : *Pour piocher avec remise 2 blanches et 1 noire en 3 boules, on sélectionne déjà 2 pioches parmi les 3 pioches où l'on obtient les blanches donc on a* $\binom{3}{2} = 3$ *possibilités.*
Les évènements B et N étant bien entendu

B : " piocher une boule blanche " et N : " piocher une boule noire "

Les tirages étant avec remise, les évènements B et N sont indépendants, ce qui nous donne

$$P_{B_1}(A) = (\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4}) + (\frac{3}{4})(\frac{1}{4})(\frac{3}{4}) + (\frac{1}{4})(\frac{3}{4})^2 = 3(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4}) = \frac{27}{64}$$

$\boxed{P_{B_2}(A)}$ *: l'évènement B_2 est réalisé et l'on souhaite que l'évènement A se réalise, c'est-à-dire que l'on a obtenu deux boules blanches et une boule noire lors de la première série (on ne repose pas les boules dans l'urne et l'on repioche trois boules) et que l'on doit avoir à la fin de l'expérience exactement 3 boules blanches.*
Autrement dit, la probabilité conditionnelle $P_{B_2}(A)$ est la probabilité de piocher 1 boule blanche et 2 boules noires. en piochant

avec remise trois boules dans l'urne qui contient désormais 4 boules dont 2 blanches et 2 noires Dans cette nouvelle urne, la probabilité de piocher une blanche est de $\frac{2}{4}$ *et une noire de* $\frac{2}{4}$.
Cela revient à dire que l'on obtient BNN *ou* NBN *ou* NNB*, ces derniers évènements étant deux à deux disjoints, on a*

$$P_{B_1}(A) = P(BNN) + P(NBN) + P(NNB) = (\frac{2}{4})^2(\frac{2}{4}) + (\frac{2}{4})(\frac{2}{4})(\frac{2}{4}) + (\frac{2}{4})(\frac{2}{4})^2 = 3(\frac{2}{4})^3 = \frac{3}{8}$$

Remarque : *Pour piocher avec remise 1 blanche et 2 noires en 3 boules, on sélectionne déjà 1 pioche parmi les 3 pioches où l'on obtient la blanche donc on a* $\binom{3}{1} = 3$ *possibilités)*

$\boxed{P_{B_3}(A)}$: *l'évènement* B_3 *est réalisé et l'on souhaite que l'évènement* A *se réalise, c'est-à-dire que l'on a obtenu trois boule blanche et zéro boule noire lors de la première série (on ne repose pas les boules dans l'urne) et que l'on doit avoir à la fin de l'expérience exactement 3 boules blanches. Autrement dit, la probabilité conditionnelle* $P_{B_3}(A)$ *est la probabilité de piocher 0 boule blanche et 3 boules noires en piochant trois boules dans l'urne qui contient désormais 4 boules dont 1 blanche et 3 noires.*
Cela revient à dire que l'on obtient BBB *et l'on a*

$$P_{B_1}(A) = P(BBB) = (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$$

Fin des calculs intermédiaires : On en déduit que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{4}{1} \times \binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} \times \binom{3}{2}(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4}) + \frac{\binom{4}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} \times \binom{3}{1}(\frac{2}{4})^2(\frac{2}{4}) + \frac{\binom{4}{3} \times \binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} \times (\frac{3}{4})^3 \\ &= \frac{12}{35} \times \frac{27}{64} + \frac{18}{35} \times \frac{3}{8} + \frac{4}{35} \times \frac{27}{64} = \frac{27}{70} \simeq 0.386 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a environ 38,6 \% de chance pour obtenir exactement 3 boules blanches à la fin de l'expérience}}$

<u>Probabilité d'obtenir 3 boules noires</u> :
On considère naturellement C l'évènement défini par :

C : " obtenir 3 boules noires à la fin de l'expérience "

Comme précédemment, on considère le système complet d'évènements (B_0, B_1, B_2, B_3). La formule des probabilités totales nous donne

$$P(C) = P(B_0 \cap C) + P(B_1 \cap C) + P(B_2 \cap C) + P(B_3 \cap C)$$

Dans notre cas, chacun des évènements ci-dessus est possible. On ne peut calculer directement leurs probabilités respectives, ce qui nous amène à utiliser la formule de conditionnement

$$P(C) = P(B_0)P_{B_0}(C) + P(B_1)P_{B_1}(C) + P(B_2)P_{B_2}(C) + P(B_3)P_{B_3}(C)$$

Début des calculs intermédiaires :

$\boxed{P(B_0)}$: *on pioche trois boules sans remise (et il n'y a pas d'ordre) parmi 7 boules (* $\binom{7}{3}$ *choix possibles de tirages) et l'on souhaite obtenir exactement zéro blanche, c'est-à-dire que l'on choisit 0 blanche parmi les 4 blanches (* $\binom{4}{0}$ *choix) et 3 noires parmi les 3 noires (* $\binom{3}{3}$ *choix) donc* $P(B_0) = \frac{\binom{4}{0} \times \binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$

Les calculs du cas des trois boules blanches ont montré que

$$\boxed{P(B_1)} = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35} \quad \boxed{P(B_2)} = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35} \quad \boxed{P(B_3)} = \frac{\binom{4}{3} \times \binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35}$$

$\boxed{P_{B_0}(C)}$: *l'évènement* B_0 *est réalisé et l'on souhaite que l'évènement* A *se réalise, c'est-à-dire que l'on a obtenu zéro boule blanche et trois boules noires lors de la première série. On ne peut donc pas repiocher de boules et la probabilité conditionnelle* $P_{B_0}(C)$ *est la probabilité d'obtenir aucune boule noire en ne piochant aucune boule. Ce dernier étant certain, on a* $P_{B_0}(C) = 1$

$\boxed{P_{B_1}(C)}$: *l'évènement* B_1 *est réalisé et l'on souhaite que l'évènement* C *se réalise, c'est-à-dire que l'on a obtenu une boule blanche et deux boules noires lors de la première série (on ne repose pas les boules dans l'urne) et que l'on doit avoir à la fin de l'expérience exactement 3 boules noires.*
Autrement dit, la probabilité conditionnelle $P_{B_1}(C)$ *est la probabilité de piocher 2 boules blanches et une boule noire en piochant trois boules avec remise dans l'urne qui contient désormais 4 boules dont 3 blanches et 1 noire. Dans cette nouvelle*

urne, la probabilité de piocher une blanche est de $\dfrac{3}{4}$ *et une noire de* $\dfrac{1}{4}$. *Nous sommes exactement dans la même configuration que pour le calcul de* $P_{B_1}(A)$ *donc*

$$P_{B_1}(C) = P_{B_1}(A) = \frac{27}{64}$$

$\boxed{P_{B_2}(C)}$ *: l'évènement* B_2 *est réalisé et l'on souhaite que l'évènement* C *se réalise, c'est-à-dire que l'on a obtenu deux boules blanches et une boule noire lors de la première série (on ne repose pas les boules dans l'urne) et que l'on doit avoir à la fin de l'expérience exactement 3 boules noires.*
Autrement dit, la probabilité conditionnelle $P_{B_2}(C)$ *est la probabilité de piocher 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant trois boules avec remise dans l'urne qui contient désormais 4 boules dont 2 blanches et 2 noires. Dans cette nouvelle urne, la probabilité de piocher une blanche est de* $\dfrac{2}{4}$ *et une noire de* $\dfrac{2}{4}$. *Nous sommes exactement dans la même configuration que pour le calcul de* $P_{B_2}(A)$ *donc*

$$P_{B_2}(C) = P_{B_2}(A) = \frac{3}{8}$$

$\boxed{P_{B_3}(C)}$ *: l'évènement* B_3 *est réalisé et l'on souhaite que l'évènement* A *se réalise, c'est-à-dire que l'on a obtenu trois boules blanches et zéro boule noire lors de la première série (on ne repose pas les boules dans l'urne) et que l'on doit avoir à la fin de l'expérience exactement 3 boules blanches. Autrement dit, la probabilité conditionnelle* $P_{B_3}(C)$ *est la probabilité de piocher 0 blanche et 3 noires en piochant trois boules dans l'urne qui contient désormais 4 boules dont 1 blanche et 3 noires. Nous sommes exactement dans la même configuration que pour le calcul de* $P_{B_3}(A)$ *donc*

$$P_{B_3}(C) = P_{B_3}(A) = \frac{27}{64}$$

Fin des calculs intermédiaires : On en déduit que

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\binom{4}{0}\times\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}\times 1 + \frac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}\times\binom{3}{2}(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4}) + \frac{\binom{4}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}\times\binom{3}{1}(\frac{2}{4})^2(\frac{2}{4}) + \frac{\binom{4}{3}\times\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}}\times(\frac{3}{4})^3 \\ &= \frac{1}{35}\times 1 + \frac{12}{35}\times\frac{27}{64} + \frac{18}{35}\times\frac{3}{8} + \frac{4}{35}\times\frac{27}{64} = \frac{29}{70} \simeq 0.414 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 41,4 \% de chance pour obtenir exactement 3 boules noires à la fin de l'expérience}}$$

correction de l'exercice 4
Pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$, on définit l'évènement A_k par

$$A_k : \text{" obtenir } k \text{ Piles à la fin de l'expérience "}$$

(par exemple, A_3 : " obtenir 3 Piles à la fin de l'expérience ")
Le nombre de Pile obtenus à la fin de l'expérience dépend fortement du nombre de Pile obtenus lors des deux premier lancers. On introduit alors, pour $k = 0, 1, 2$, l'évènement B_k défini par

$$B_k : \text{"obtenir } k \text{ Piles lors des deux premiers lancers "}$$

(par exemple, B_0 : " obtenir 0 Pile aux deux premiers lancers "). La famille (B_0, B_1, B_2) forment un système complet d'évènements
Calcul de $P(A_0)$: La formule des probabilités totales nous donne

$$P(A_0) = P(B_0 \cap A_0) + P(B_1 \cap A_0) + P(B_2 \cap A_0)$$

Les évènements $B_1 \cap A_0$ et $B_2 \cap A_0$ sont impossibles car :
le premier signifie que l'on obtient 1 Pile aux deux premiers lancers et 0 Pile à l'issue l'expérience, ce qui est impossible,
le second signifie que l'on obtient 2 Piles aux deux premiers lancers et 0 Pile à l'issue de l'expérience, ce qui est encore impossible. Par contre, l'évènement $B_0 \cap A_0$ est ossible. On a donc

$$P(A_0) = P(B_0 \cap A_0) + 0 + 0 = P(B_0)P_{B_0}(A_0) = (1-p)^2 \times 1 = (1-p)^2$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 0 Pile vaut } (1-p)^2}$$

Justification des calculs de probabilités :
$P(B_0)$ *: on lance deux fois la pièce et on obtient 0 pile donc on obtient 2 Faces, ce qui nous donne* $B_0 = FF$. *Les lancers étant indépendants et la probabilité d'obtenir Face étant* $1-p$, *on a :* $P(B_0) = P(FF) = (1-p)^2$.
$P_{B_0}(A_0)$ *: l'évènement* B_0 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* A_0, *c'est-à-dire que l'on a obtenu 0 Pile aux deux premiers lancers et que l'on souhaite obtenir aucun Pile à l'issue de l'expérience. La probabilité conditionnelle*

$P_{B_0}(A_0)$ *est la probabilité d'obtenir 0 Pile en 0 lancer, ce qui est un évènement certain* $P_{B_0}(A_0) = 1$.
Calcul de $P(A_1)$: La formule des probabilités totales nous donne

$$P(A_1) = P(B_0 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_1) + P(B_2 \cap A_1)$$

Les évènements $B_0 \cap A_1$ et $B_2 \cap A_1$ sont impossibles car :
le premier signifie que l'on obtient 0 Pile aux deux premiers lancers (donc on ne peut relancer la pièce) et on doit obtenir au final 1 Pile, par conséquent, on ne lance au total que 2 fois la pièce et l'on a obtenu 0 Pile à l'issue de l'expérience et non 1 Pile d'où l'impossibilité
le second signifie que l'on a 2 Piles aux deux premiers lancers et 1 Pile à l'issue l'expérience, ce qui est impossible.
Par contre, l'évènement $B_1 \cap A_1$ est possible. On a donc

$$P(A_1) = 0 + P(B_1 \cap A_1) + 0 = P(B_1)P_{B_1}(A_1) = 2p(1-p) \times (1-p) = 2p(1-p)^2$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 1 Pile vaut } 2p(1-p)^2}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\boxed{P(B_1)}$ *: on lance deux fois la pièce et on obtient 1 pile donc on obtient 1 Pile et 1 Face.*
$B_1 = (FP) \cup (PF)$. *Les lancers étant indépendants et la probabilité d'obtenir Face étant* $1-p$, *on a*

$$P(B_1) = P(FP) + P(PF) = (1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p).$$

Remarque *: on choisit 1 lancer parmi les deux lancers donc on a* $\binom{2}{1} = 2$ *choix*
$\boxed{P_{B_1}(A_1)}$ *: l'évènement* B_1 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* A_1*, c'est-à-dire que l'on a obtenu 1 Pile (et 1 Face) aux deux premiers lancers et que l'on souhaite obtenir 1 Pile à l'issue de l'expérience (donc on doit obtenir 1 Face au troisième lancer). La probabilité conditionnelle* $P_{B_1}(A_1)$ *est simplement la probabilité d'obtenir 1 Face en 1 lancer de pièce donc*

$$P_{B_1}(A_1) = 1-p$$

Calcul de $P(A_2)$: La formule des probabilités totales nous donne

$$P(A_2) = P(B_0 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) + P(B_2 \cap A_2)$$

L'évènement $B_0 \cap A_2$ est impossible car cela signifie que l'on obtient 0 Pile aux deux premiers lancers, donc on ne peut relancer la pièce, et on doit obtenir au final 2 Piles, par conséquent, on ne lance au total que 2 fois la pièce et l'on a obtenu 0 Pile à l'issue de l'expérience et non 2 Piles d'où l'impossibilité
le second signifie que l'on a 2 Piles aux deux premiers lancers et 1 Pile à l'issue l'expérience, ce qui est impossible.
Par contre, les évènements $B_1 \cap A_2$ et $B_2 \cap A_2$ sont possibles. On a donc

$$P(A_2) = P(B_1)P_{B_1}(A_2) + P(B_2)P_{B_2}(A_2) = 2p(1-p) \times p + p^2 \times (1-p)^2 = p^2(1-p)(2+1-p) = p^2(1-p)(3-p)$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 2 Piles vaut } p^2(1-p)(3-p)}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\boxed{P(B_1)}$ *: on a effectué le calcul auparavant*
$\boxed{P_{B_1}(A_2)}$ *: l'évènement* B_1 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* A_2*, c'est-à-dire que l'on a obtenu 1 Pile (et 1 Face) aux deux premiers lancers (donc on peut relancer une fois la pièce) et on souhaite obtenir 2 Piles à la fin de l'expérience (donc on doit obtenir 1 Pile au troisième lancer). La probabilité conditionnelle* $P_{B_1}(A_2)$ *est la probabilité d'obtenir 1 Pile en un lancer donc* $P_{B_1}(A_2) = p$
$\boxed{P(B_2)}$ *: on doit obtenir deux Piles en deux lancers donc* $B_2 = PP$*, ce qui implique que* $P(B_2) = p^2$.
$\boxed{P_{B_2}(A_2)}$ *: l'évènement* B_2 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* A_2*, c'est-à-dire que l'on a obtenu 2 Piles aux deux premiers lancers (donc on peut relancer deux fois la pièce) et on souhaite obtenir 2 Piles à la fin de l'expérience (donc on doit obtenir 2 Faces aux troisième et quatrième lancer). La probabilité conditionnelle* $P_{B_2}(A_2)$ *est la probabilité d'obtenir 2 Faces en 2 lancers donc* $P_{B_2}(A_2) = P(FF) = (1-p)^2$
Calcul de $P(A_3)$: La formule des probabilités totales nous donne

$$P(A_3) = P(B_0 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_3) + P(B_2 \cap A_3)$$

Les évènements $B_0 \cap A_3$ et $B_1 \cap A_3$ sont impossibles car :
le premier signifie que l'on obtient 0 Pile aux deux premiers lancers (donc on ne peut relancer la pièce) et on doit obtenir au final 3 Piles, par conséquent, on ne lance au total que 2 fois la pièce et l'on a obtenu 0 Pile à l'issue de l'expérience et non 3 Piles d'où l'impossibilité
le second signifie que l'on a 1 Pile (et 1 Face) aux deux premiers lancers et 3 Pile à l'issue l'expérience, par conséquent,

on ne relancer qu'une fois la pièce et on obtient au mieux 1 seul Pile et au final, on a au plus 2 Piles et non 3 Pile, d'où l'impossibilité.
Par contre, l'évènement $B_2 \cap A_3$ est possible. On a donc

$$P(A_3) = P(B_2)P_{B_2}(A_3) = p^2 \times 2p(1-p) = 2p^3(1-p)$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 3 Piles vaut } 2p^3(1-p)}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\boxed{P(B_2)}$ *: on a effectué le calcul auparavant*
$\boxed{P_{B_2}(A_3)}$ *: l'évènement B_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A_3, c'est-à-dire que l'on a obtenu 2 Piles aux deux premiers lancers (donc on peut relancer deux fois la pièce) et on souhaite obtenir 3 Piles à la fin de l'expérience (donc on doit obtenir 1 Pile et 1 Face aux deux lancers suivants). La probabilité conditionnelle $P_{B_2}(A_3)$ est la probabilité d'obtenir 1 Pile en deux lancers, c'est-çà-dire que l'on est dans la même configuration que la réalisation de B_1, donc $P_{B_2}(A_3) = P(B_1) = 2p(1-p)$*
Calcul de $P(A_4)$: La formule des probabilités totales nous donne

$$P(A_4) = P(B_0 \cap A_4) + P(B_1 \cap A_4) + P(B_2 \cap A_4)$$

Les évènements $B_0 \cap A_4$ et $B_1 \cap A_4$ sont impossibles car :
le premier signifie que l'on obtient 0 Pile aux deux premiers lancers (donc on ne peut relancer la pièce) et on doit obtenir au final 4 Piles, par conséquent, on ne lance au total que 2 fois la pièce et l'on a obtenu 0 Pile à l'issue de l'expérience et non 4 Piles d'où l'impossibilité
le second signifie que l'on a 1 Pile (et 1 Face) aux deux premiers lancers et 4 Pile à l'issue l'expérience, par conséquent, on ne relancer qu'une fois la pièce et on obtient au mieux 1 seul Pile et au final, on a au plus 2 Piles et non 4 Pile, d'où l'impossibilité.
Par contre, l'évènement $B_2 \cap A_4$ est possible. On a donc

$$P(A_4) = P(B_2)P_{B_2}(A_4) = p^2 \times p^2 = p^4$$

$$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir 4 Piles vaut } p^4}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\boxed{P(B_2)}$ *: on a effectué le calcul auparavant*
$\boxed{P_{B_2}(A_4)}$ *: l'évènement B_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A_4, c'est-à-dire que l'on a obtenu 2 Piles aux deux premiers lancers (donc on peut relancer deux fois la pièce) et on souhaite obtenir 4 Piles à la fin de l'expérience (donc on doit obtenir 2 Piles aux deux lancers suivants). La probabilité conditionnelle $P_{B_2}(A_4)$ est la probabilité d'obtenir 2 Piles en deux lancers, c'est-çà-dire que l'on est dans la même configuration que la réalisation de B_2, donc $P_{B_2}(A_4) = P(B_2) = p^2$*
Remarque : La somme des probabilités vaut bien 1 car, en développant la somme suivante, on a

$$P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = (1-p)^2 + 2p(1-p)^2 + p^2(1-p)(3-p) + 2p^3(1-p) + p^4 = 1$$

correction de l'exercice 5
Le nombre de cartes piochées dépend du nombre de boules noires obtenues auparavant. Pour cela, on introduit les évènements suivants :

Pour $k \in \{0,1,2,3\}$, N_k : " obtenir k boules blanches lors de la pioche des 3 boules "

(par exemple, N_2 : " obtenir 2 boules noires lors de la pioche des 3 boules ")
La famille (N_0, N_1, N_2, N_3) est un système complet d'évènements

a) On pose A : " obtenir exactement 2 coeurs à la fin de l'expérience "
La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènements (N_0, N_1, N_2, N_3) nous donne

$$P(A) = P(N_0 \cap A) + P(N_1 \cap A) + P(N_2 \cap A) + P(N_3 \cap A)$$

Les évènements $N_0 \cap A$ et $N_1 \cap A$ sont impossibles car :
pour le premier, on obtient aucune boule noire donc on ne pioche aucune carte et l'on ne peut avoir deux coeurs au final
pour le second, on obtient 1 boule noire donc on pioche une seule carte et l'on ne peut avoir deux coeurs au final
Par contre, les évènements $N_2 \cap A$ et $N_3 \cap A$ sont possibles. On ne peut réinterpréter chacune de ces intersections, donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned} P(A) &= 0 + 0 + P(N_2)P_{N_2}(A) + P(N_3)P_{N_3}(A) = \binom{3}{2}(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5}) \times \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} + (\frac{3}{5})^3 \times \frac{\binom{8}{2} \times \binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} \\ &= \frac{54}{125} \times \frac{7}{124} + \frac{27}{125} \times \frac{21}{155} = \frac{2079}{38\,750} \simeq 0.054 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 5,4 \% de chance d'obtenir exactement 2 coeurs}}$$

Justifications des calculs de probabilités précédents :

$\boxed{P(N_2)}$ *: on pioche avec remise 3 boules et on doit obtenir exactement 2 noires. La probabilité d'obtenir une blanche en une pioche est de* $\dfrac{2}{5}$ *et la probabilité d'obtenir une noire en une pioche est de* $\dfrac{3}{5}$

L'évènement N_2 *s'écrit encore* $N_2 = (NNB) \cup (NBN) \cup (BNN)$, *où les évènements* B *et* N *sont bien entendu*

B : " obtenir une blanche " et N : " obtenir une noire "

Les tirages étant avec remise, ils sont deux à deux indépendants et l'union précédente étant disjointe, on a

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(NNB) + P(NBN) + P(BNN) = P(N)P(N)P(B) + P(N)P(B)P(N) + P(B)P(N)P(N) \\ &= (\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5}) + (\frac{3}{5})(\frac{2}{5})(\frac{3}{5}) + (\frac{2}{5})(\frac{3}{5})^2 = 3(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5}) = \frac{54}{125} \end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 2 pioches parmi les 3 pioches qui vont fournir les noires donc on a* $\binom{3}{2} = 2$ *choix pour ces deux pioches*

$\boxed{P_{N_2}(A)}$ *: l'évènement* N_2 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* A, *c'est-à-dire que l'on a obtenu 2 boules noires lors des trois premières pioches (ce qui permet de piocher deux cartes sans remise dans le paquet de cartes) et on doit obtenir 2 coeurs au final. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{N_2}(A)$ *est la probabilité d'obtenir 2 coeurs en piochant deux cartes sans dans un paquet de 32 cartes dont 8 sont des coeurs et 24 des non coeurs. Pour les cas possibles, on doit choisir 2 cartes parmi 32 (* $\binom{32}{2}$ *choix) et, pour les cas favorables, on doit choisir 2 coeurs parmi les 8 coeurs possibles (* $\binom{8}{2}$ *choix) donc* $P_{N_2}(A) = \dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}}$

$\boxed{P(N_3)}$ *: on pioche avec remise 3 boules et on doit obtenir exactement 3 noires. La probabilité d'obtenir une blanche en une pioche est de* $\dfrac{2}{5}$ *et la probabilité d'obtenir une noire en une pioche est de* $\dfrac{3}{5}$

L'évènement N_2 *s'écrit encore* $N_2 = NNN$ *donc* $P(N_2) = P(N)P(N)P(N) = (\dfrac{3}{5})^3$

$\boxed{P_{N_3}(A)}$ *: l'évènement* N_3 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* A, *c'est-à-dire que l'on a obtenu 3 boules noires lors des trois premières pioches (ce qui permet de piocher trois cartes sans remise dans le paquet de cartes) et on doit obtenir 2 coeurs au final. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{N_3}(A)$ *est la probabilité d'obtenir exactement 2 coeurs en piochant trois cartes sans dans un paquet de 32 cartes dont 8 sont des coeurs et 24 des non coeurs. Pour les cas possibles, on doit choisir 3 cartes parmi 32 (* $\binom{32}{3}$ *choix) et, pour les cas favorables, on doit choisir 2 coeurs parmi les 8 coeurs possibles (* $\binom{8}{2}$ *choix) et on choisit 1 carte non coeur parmi les 24 non coeurs possibles (* $\binom{24}{1}$ *choix) donc* $P_{N_3}(A) = \dfrac{\binom{8}{2} \times \binom{24}{1}}{\binom{32}{3}}$

b) On pose

C : " obtenir un brelan "

(rappel : un brelan = 3 cartes de même nature, par exemple, trois as, mais 3 trêfles ne convient pas).
La formule des probabilité totale appliquée au système complet d'évènements (N_0, N_1, N_2, N_3) nous donne

$$P(C) = P(N_0 \cap C) + P(N_1 \cap C) + P(N_2 \cap C) + P(N_3 \cap C)$$

Les évènements $N_0 \cap C$, $N_1 \cap C$ et $N_2 \cap C$ sont impossibles car dans chacun des cas on obtient respectivement 0,1 ou 2 boules noires donc on pioche au plus 2 cartes, ce qui interdit l'obtention de 3 cartes (donc d'un brelan).
L'évènement $N_3 \cap C$ est possible, on ne peut le réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$P(C) = P(N_3)P_{N_3}(C) = (\frac{3}{5})^3 \times \binom{8}{1}\frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{27}{19\,375} \simeq 0.004 \pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{On a 0,4 \% de chance d'obtenir un brelan}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :

$\boxed{P(N_3)}$ *: l'évènement* N_3 *s'écrit* NNN *donc* $P(N_3) = P(NNN) = P(N)^3 = (\dfrac{3}{5})^3$.

$\boxed{P_{N_3}(C)}$ *: l'évènement* N_3 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* C, *c'est-à-dire que l'on a obtenu 3 boules noires (donc on peut piocher 3 cartes) et que l'on souhaite obtenir 3 cartes de même nature. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{N_3}(C)$ *est la probabilité d'obtenir 3 cartes de même nature en piochant avec remise 3 cartes*

dans un jeu de 52 cartes (contenant 8 natures de cartes : as, roi, dame, etc, et chaque nature possédant 4 cartes : 4 as, 4 rois, 4 dames, etc)
Pour les cas possibles, on pioche 3 cartes sans remise dans un paquet de 32 cartes ($\binom{32}{3}$ choix) et pour les cas favorables, on choisit 3 as parmi les 4 as ($\binom{4}{3}$ choix) ou 3 rois parmi les 4 rois ($\binom{4}{3}$ choix possibles), ..., 3 sept parmi les 4 sept ($\binom{4}{3}$ choix) donc

$$P_{N_3}(C) = \frac{\overbrace{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}^{\text{huit fois}}}{\binom{32}{3}} = \frac{8 \times \binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{1}{155}$$

Remarque *: On choisit une nature de carte parmi les 8 disponibles donc on a $\binom{8}{1} = 8$ choix*

c) On pose

D : " obtenir aucune carte "

La formule des probabilité totale appliquée au système complet d'évènements (N_0, N_1, N_2, N_3) nous donne

$$P(D) = P(N_0 \cap D) + P(N_1 \cap D) + P(N_2 \cap D) + P(N_3 \cap D)$$

Les évènements $N_1 \cap D$, $N_2 \cap D$ et $N_3 \cap D$ sont impossibles car dans chacun des cas on obtient nécessairement au moins une carte, ce qui contrevient au fait que l'on ne veut aucune carte au final
L'évènement $N_0 \cap D$ est possible, on ne peut le réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$P(D) = P(N_0)P_{N_0}(D) = (\frac{2}{5})^3 \times 1 = \frac{8}{125} \simeq 0.064 \pm 10^{-3}$$

$\boxed{\text{On a 6,4 \% de chance d'obtenir aucune carte}}$

Justification des calculs de probabilités précédents :
$\boxed{P(N_0)}$ *: l'évènement N_0 s'écrit BBB donc $P(N_0) = P(BBB) = P(B)^3 = (\frac{2}{5})^3$.*
$\boxed{P_{N_0}(D)}$ *: l'évènement N_0 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement D, c'est-à-dire que l'on a obtenu 0 boules noires (donc on ne peut piocher de cartes) et que l'on souhaite obtenir 0 carte au final. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{N_0}(D)$ est la probabilité d'obtenir 0 carte en piochant avec remise .... 0 cartes dans un jeu de 52 cartes, ce qui arrive nécessairement donc $P_{N_3}(C) = 1$ (évènement certain)*

d) On pose

E : " obtenir au moins un as "

De façon évidente, nous allons calculer la probabilité de l'évènement contraire $F = \overline{E}$: " obtenir aucun as ". On applique la formule des probabilités totales à la famille (N_0, N_1, N_2, N_3), ce qui nous donne

$$P(F) = P(N_0 \cap F) + P(N_1 \cap F) + P(N_2 \cap F) + P(N_3 \cap F)$$

aucun des ces évènements n'est impossible, on ne peut les réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned} P(F) &= P(N_0)P_{N_0}(F) + P(N_1)P_{N_1}(F) + P(N_2)P_{N_2}(F) + P(N_3)P_{N_3}(F) \\ &= (\frac{2}{5})^3 \times 1 + \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}(\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^2 \times \frac{\binom{28}{1}}{\binom{32}{1}} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5}) \times \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} + (\frac{3}{5})^3 \times \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} \\ &= \frac{8}{125} \times 1 + \frac{36}{125} \times \frac{7}{8} + \frac{54}{125} \times \frac{189}{248} + \frac{27}{125} \times \frac{819}{1240} = \frac{122\,123}{155\,000} \end{aligned}$$

donc

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{122\,123}{155\,000} = \frac{32\,877}{155\,000} \simeq 0.212 \pm 10^{-3}$$

$\boxed{\text{On a environ 21,2 \% de chance d'avoir au moins un as}}$

Justification des calculs de probabilités précédents :
Les probabilités $P(N_0)$, $P(N_2)$ et $P(N_3)$ ont déjà été calculées dans les questions a), b) et c).
$\boxed{P(N_1)}$: *on pioche avec remise 3 boules et on doit obtenir exactement 1 noires. La probabilité d'obtenir une blanche en une pioche est de $\frac{2}{5}$ et la probabilité d'obtenir une noire en une pioche est de $\frac{3}{5}$*

L'évènement N_1 s'écrit encore $N_1 = (NBB) \cup (BNB) \cup (BBN)$. Les tirages étant avec remise, ils sont deux à deux indépendants et l'union précédente étant disjointe, on a

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(NBB) + P(BNB) + P(BNN) = P(N)P(B)P(B) + P(B)P(N)P(B) + P(B)P(B)P(N) \\ &= (\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^2 + (\frac{2}{5})(\frac{3}{5})(\frac{2}{5}) + (\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5}) = 3(\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^2 = \frac{36}{125} \end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 1 pioches parmi les 3 pioches qui vont fournir les noires donc on a $\binom{3}{1} = 3$ choix*

$\boxed{P_{N_0}(F)}$ *: l'évènement N_0 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement F, c'est-à-dire que l'on a obtenu 0 boule noire (donc on ne peut piocher de carte) et l'on doit obtenir aucun as. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{N_0}(F)$ est la probabilité d'obtenir aucun as lorsqu'on ne pioche aucune carte. Cet évènement étant certain, on a $P_{N_0}(F) = 1$*

$\boxed{P_{N_1}(F)}$ *: l'évènement N_1 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement F, c'est-à-dire que l'on a obtenu 1 boule noire (donc on pioche 1 carte) et l'on doit obtenir aucun as. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{N_1}(F)$ est la probabilité d'obtenir aucun as lorsqu'on pioche une seule carte. Pour les cas possibles, on choisit une carte parmi les 32 cartes disponibles ($\binom{32}{1}$ choix) et pour les cas favorables, on choisit une carte parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as ($\binom{28}{1}$ choix) donc $P_{N_1}(F) = \dfrac{\binom{28}{1}}{\binom{32}{1}} = \dfrac{7}{8}$*

$\boxed{P_{N_2}(F)}$ *: l'évènement N_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement F, c'est-à-dire que l'on a obtenu 2 boules noires (donc on pioche 2 cartes) et l'on doit obtenir aucun as. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{N_2}(F)$ est la probabilité d'obtenir aucun as lorsqu'on pioche deux cartes avec remise. Pour les cas possibles, on choisit deux cartes parmi les 32 cartes disponibles ($\binom{32}{2}$ choix) et pour les cas favorables, on choisit deux cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as ($\binom{28}{2}$ choix) donc $P_{N_2}(F) = \dfrac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = \dfrac{189}{248}$*

$\boxed{P_{N_3}(F)}$ *: l'évènement N_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement F, c'est-à-dire que l'on a obtenu 3 boules noires (donc on pioche 3 cartes) et l'on doit obtenir aucun as. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{N_3}(F)$ est la probabilité d'obtenir aucun as lorsqu'on pioche trois cartes. Pour les cas possibles, on choisit 3 cartes parmi les 32 cartes disponibles ($\binom{32}{3}$ choix) et pour les cas favorables, on choisit 3 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as ($\binom{28}{3}$ choix) donc $P_{N_3}(F) = \dfrac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = \dfrac{819}{1240}$*

correction de l'exercice 6

Le nombre de boules piochées est étroitement lié au nombre de piles obtenus à la série de lancer de la pièce. On introduit alors naturellement, pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, les évènements

$$P_k : \text{" on obtient } k \text{ Piles lors des quatre lancers de la pièce "}$$

(par exemple, P_1 : " on obtient 1 Pile lors des quatre lancers de la pièce ", P_3 : " on obtient 3 Piles lors des quatre lancers de la pièce "

Probabilité d'obtenir les 3 boules rouges : On considère bien entendu l'évènement A : " obtenir les 3 rouges ".
On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$, ce qui nous donne

$$P(A) = P(P_0 \cap A) + P(P_1 \cap A) + P(P_2 \cap A) + P(P_3 \cap A) + P(P_4 \cap A)$$

Les évènements $P_0 \cap A$, $P_1 \cap A$ et $P_2 \cap A$ sont impossibles, car pour chacun d'entre eux, on obtient au mieux deux piles, ce qui permet au mieux de piocher deux boules, ce qui interdit d'obtenir 3 boules, en particulier d'obtenir les trois rouges.
Par contre, les évènements $P_3 \cap A$ et $P_4 \cap A$ sont possibles. On ne peut réinterpréter ces évènements, donc on applique la formule de conditionnement, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P(A) &= P(P_3)P_{P_3}(A) + P(P_4)P_{P_4}(A) = \binom{4}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2}) \times \frac{\binom{3}{3}}{\binom{15}{3}} + (\frac{1}{2})^4 \times \frac{\binom{3}{3}\binom{12}{1}}{\binom{15}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{455} + \frac{1}{16} \times \frac{4}{455} = \frac{1}{910} \simeq 0.0011 \pm 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 0,1 \% de chance d'obtenir les 3 boules rouges}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :
On définit les évènements P et F par P : " obtenir Pile " et F : " obtenir Face "

$\boxed{P(P_3)}$ *: on obtient 3 Piles en 4 lancer de pièces.*
L'évènement P_3 s'écrit encore

$$P_3 = (PPPF) \cup (PPFP) \cup (PFPP) \cup (FPPP)$$

donc

$$\begin{aligned} P(P_3) &= P(P)P(P)P(P)P(F) + P(P)P(P)P(F)P(P) + P(P)P(F)P(P)P(P) + P(F)P(P)P(P)P(P) \\ &= (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 = 4(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Remarque *: on choisit 3 des quatre lancers qui fournissent Pile donc on a* $\binom{3}{4} = 4$ *choix)*

$\boxed{P_{P_3}(A)}$ *: l'évènement P_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A, c'est-à-dire que l'on a obtenu 3 Piles (donc on pioche sans remise 3 boules) et on veut obtenir 3 rouges. La probabilité conditionnelle $P_{P_3}(A)$ est la probabilité d'obtenir 3 rouges en piochant sans remise 3 boules dans l'urne. Pour les cas favorables, on choisit 3 boules parmi les 5+3+7=15 boules disponibles ($\binom{15}{3}$ choix), et pour les cas favorables, on choisit 3 boules parmi les 3 boules rouges ($\binom{3}{3}$ choix) donc on a* $P_{P_3}(A) = \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{15}{3}}$

$\boxed{P(P_4)}$ *: l'évènement P_4 s'écrit encore $P_4 = PPPP$ donc* $P(P_4) = (\dfrac{1}{2})^4$

$\boxed{P_{P_4}(A)}$ *: l'évènement P_4 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A, c'est-à-dire que l'on a obtenu 4 Piles (donc on pioche sans remise 4 boules) et on veut obtenir 3 rouges. La probabilité conditionnelle $P_{P_3}(A)$ est la probabilité d'obtenir 3 rouges en piochant sans remise 4 boules dans l'urne. Pour les cas favorables, on choisit 4 boules parmi les 5+3+7=15 boules disponibles ($\binom{15}{4}$ choix), et pour les cas favorables, on choisit 3 boules parmi les 3 boules rouges ($\binom{3}{3}$ choix) et 1 boule parmi les 12 boules non rouges ($\binom{12}{1}$ choix) donc on a* $P_{N_4}(A) = \dfrac{\binom{3}{3}\binom{12}{1}}{\binom{15}{4}}$

<u>Probabilité d'obtenir aucune boule verte</u> : On considère bien entendu l'évènement C : " obtenir aucune boule verte ".
On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$, ce qui nous donne

$$P(C) = P(P_0 \cap C) + P(P_1 \cap C) + P(P_2 \cap C) + P(P_3 \cap C) + P(P_4 \cap C)$$

Tous les évènements précédents sont possibles, on ne peut réinterpréter ces évènements, donc on applique la formule de conditionnement, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P(C) &= P(P_0)P_{B_0}(C) + P(P_1)P_{P_1}(C) + P(P_2)P_{P_2}(C) + P(P_3)P_{P_3}(C) + P(P_4)P_{P_4}(C) \\ &= (\frac{1}{2})^4 \times 1 + \binom{4}{1}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^3 \times \frac{\binom{10}{1}}{\binom{15}{1}} + \binom{4}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2 \times \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} + \binom{4}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2}) \times \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} + (\frac{1}{2})^4 \times \frac{\binom{10}{4}}{\binom{15}{4}} \\ &= \frac{1}{16} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{4} \times \frac{24}{91} + \frac{1}{16} \times \frac{2}{13} = \frac{2033}{4368} \simeq 0.465 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a 46,5 \% de chance d'obtenir aucune boule verte}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :
On définit les évènements P et F par P : " obtenir Pile " et F : " obtenir Face "

$\boxed{P(P_0)}$ *: L'évènement P_0* s'écrit *$P_0 = FFFF$ donc* $P(P_0) = P(FFFF) = P(F)P(F)P(F)P(F) = (\dfrac{1}{2})^4 = \dfrac{1}{4}$

$\boxed{P_{P_0}(C)}$ *: l'évènement P_0 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement C, c'est-à-dire que l'on a obtenu 0 Piles (donc on ne repioche pas de boules) et on veut obtenir aucune verte. La probabilité conditionnelle $P_{P_0}(C)$ est la probabilité d'obtenir aucune verte en piochant aucune boule (!), cet évènement est certain donc* $P_{P_0}(C) = 1$

$\boxed{P(P_1)}$ *: L'évènement P_1 s'écrit encore $P_1 = (PFFF) \cup (FPFF) \cup (FFPF) \cup (FFFP)$ donc*

$$\begin{aligned} P(P_1) &= P(P)P(F)P(F)P(F) + P(F)P(P)P(F)P(F) + P(F)P(F)P(P)P(F) + P(F)P(F)P(F)P(P) \\ &= (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 = 4(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Remarque : *On choisit 1 lancer parmi les 4 lancers donc on a* $\binom{4}{1} = 4$ *choix*

$\boxed{P_{P_1}(A)}$ *: l'évènement P_1 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement C, c'est-à-dire que l'on a obtenu 1 Pile (donc on pioche sans remise 1 boule) et on veut obtenir aucune verte. La probabilité conditionnelle $P_{P_1}(A)$ est la probabilité d'obtenir aucune verte en piochant sans remise 1 boule dans l'urne. Pour les cas possibles, on choisit 1 boule parmi les 15 boules disponibles ($\binom{15}{1}$ choix), et pour les cas favorables, on choisit 1 boule parmi les 10 boules non vertes ($\binom{10}{1}$ choix) donc on a* $P_{P_1}(C) =$

$\boxed{P(P_2)}$ *: L'évènement P_2 s'écrit encore*

$$P_2 = (PPFF) \cup (PFPF) \cup (PFFP) \cup (FPPF) \cup (FPFP) \cup (FFPP)$$

donc

$$P(P_2) = (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 = 6(\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{8}$$

Remarque : *On choisit 2 lancers parmi les 4 lancers donc on a* $\binom{4}{2} = 6$ *choix*

$\boxed{P_{P_2}(C)}$ *: l'évènement P_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement C, c'est-à-dire que l'on a obtenu 2 Piles (donc on pioche sans remise 2 boules) et on veut obtenir aucune verte. La probabilité conditionnelle $P_{P_2}(C)$ est la probabilité d'obtenir aucune verte en piochant sans remise 2 boules dans l'urne. Pour les cas possibles, on choisit 2 boules parmi les 15 boules disponibles ($\binom{15}{2}$ choix), et pour les cas favorables, on choisit 2 boules parmi les 10 boules non vertes ($\binom{10}{2}$ choix) donc on a* $P_{P_2}(C) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}}$

$\boxed{P(P_3)}$ *: L'évènement P_3 s'écrit encore $P_3 = (PPPF) \cup (PPFP) \cup (PFPP) \cup (FPPP)$ donc*

$$\begin{aligned} P(P_1) &= P(P)P(P)P(P)P(F) + P(P)P(P)P(F)P(P) + P(P)P(F)P(P)P(P) + P(F)P(P)P(P)P(P) \\ &= (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 = 4(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Remarque : *On choisit 3 lancers parmi les 4 lancers donc on a* $\binom{4}{3} = 4$ *choix*

$\boxed{P_{P_3}(C)}$ *: l'évènement P_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement C, c'est-à-dire que l'on a obtenu 3 Piles (donc on pioche sans remise 3 boules) et on veut obtenir aucune verte. La probabilité conditionnelle $P_{P_3}(A)$ est la probabilité d'obtenir aucune verte en piochant sans remise 3 boules dans l'urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 15 boules disponibles ($\binom{15}{3}$ choix), et pour les cas favorables, on choisit 3 boules parmi les 10 boules non vertes ($\binom{10}{3}$ choix) donc on a* $P_{P_3}(C) = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}}$

$\boxed{P(P_4)}$ *: L'évènement P_4 s'écrit $P_4 = PPPP$ donc $P(P_4) = P(PPPP) = P(P)P(P)P(P)P(P) = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4}$*

$\boxed{P_{P_4}(C)}$ *: l'évènement P_4 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement C, c'est-à-dire que l'on a obtenu 4 Piles (donc on pioche sans remise 4 boules) et on veut obtenir aucune verte. La probabilité conditionnelle $P_{P_4}(A)$ est la probabilité d'obtenir aucune verte en piochant sans remise 4 boules dans l'urne. Pour les cas possibles, on choisit 4 boules parmi les 15 boules disponibles ($\binom{15}{4}$ choix), et pour les cas favorables, on choisit 4 boules parmi les 10 boules non vertes ($\binom{10}{4}$ choix) donc on a* $P_{P_4}(C) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{15}{4}}$

correction de l'exercice 7

Le protocole de pioche des trois boules dépend du numéro obtenu lors du lancer du dé, plus précisément, il dépend si l'on obtient un nombre impair ou (le 2 ou 4) ou le 6.
On introduit naturellement les évènements :

U_1 : " le dé fournit un nombre impair " U_2 : " le dé fournit le 2 ou le 4 " U_3 : " le dé fournit le 6 "

a) On considère l'évènement

A : " piocher trois boules de même couleur "

La famille (U_1, U_2, U_3) est un système complet d'évènements donc on peut appliquer la formule des probabilités totales, ce qui nous donne

$$P(A) = P(U_1 \cap A) + P(U_2 \cap A) + P(U_3 \cap A) = P(U_1)P_{U_1}(A) + P(U_2)P_{U_2}(A) + P(U_3)P_{U_3}(A)$$

(puisqu'aucun évènement n'est impossible et que l'on peut le réinterpréter, on utilise la formule de conditionnement)Nous allons maintenant calculer chacune de ces probabilités :
Début des calculs intermédiaires :

$\boxed{P(U_1),\ P(U_2)\ et\ P(U_3)}$ *: le dé étant équilibré, chaque numéro a la même probabilité $\frac{1}{6}$ d'apparaitre. Le fait d'avoir un numéro impair signifie que l'on obtient le 1 ou le 3 ou le 5 donc $P(U_1) = \frac{3}{6}$. De même, on a $P(U_2) = \frac{2}{6}$ et $P(U_3) = \frac{1}{6}$.*

$\boxed{P_{U_1}(A)}$ *: l'évènement U_1 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A, c'est-à-dire que le dé a donné un numéro impair (donc on pioche 3 boules avec remise dans la première urne) et on doit obtenir trois boules de même couleur (c'est-à-dire, ici, on pioche soit 3 boules blanches, soit trois boules vertes). Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_1}(A)$ est la probabilité de piocher, avec remis, 3 boules blanches ou 3 boules vertes dans l'urne contenant*

1 blancher et 2 vertes.
De façon évidente, si l'on considère les évènements B " piocher une boule blanche " et V " piocher une boule verte ", on a $P_{U_1}(A) = P[(BBB) \cup (VVV)]$. Les évènements BBB et VVV étant disjoints, les évènements B et V étant indépendants (on pioche avec remise) et la probabilité de piocher une boule blanche dans la première urne étant $\frac{1}{3}$ et la probabilité de piocher une boule verte étant $\frac{2}{3}$, on a

$$P_{U_1}(A) = (\frac{1}{3})^3 + (\frac{2}{3})^3 = \frac{1}{3}$$

$\boxed{P_{U_2}(A)}$ *: l'évènement U_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A, c'est-à-dire que le dé a donné le numéro 2 ou 4 (donc on pioche sans remise 3 boules dans la seconde urne) dans la seconde urne et on souhaite obtenir au final 3 boules de même couleur (les tirages étant sans remise, cela signifie que l'on doit piocher 3 boules vertes). Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_2}(A)$ est la probabilité de piocher sans remise 3 boules dans la seconde urne contenant 4 boules vertes et 2 boules noires et d'obtenir au final 3 boules vertes. Pour les cas possibles, on doit piocher (sans remise) 3 boules parmi les 4+2=6 boules disponibles dans la seconde urne ($\binom{6}{3}$ choix)) et pour les cas favorables, on choisit 3 boules vertes parmi les 4 boules vertes ($\binom{4}{3}$ choix) donc*

$$P_{U_2}(A) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$$

$\boxed{P_{U_3}(A)}$ *: l'évènement U_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement A, c'est–à-dire que le dé a donné le numéro 6 (donc on pioche sans remise 3 boules dans la troisième urne) et on souhaite obtenir au final 3 boules de même couleur (les tirages étant sans remise, cela signifie ici que l'on obtient soit 3 boules noires, soit 3 boules vertes). La probabilité conditionnelle $P_{U_3}(A)$ est donc la probabilité de piocher 3 boules sans remise dans la troisième urne, contenant 3 noires, 2 blanches et 3 vertes, et d'obtenir au final 3 boules noires ou trois boules noires. Pour les cas possibles, on choisit sans remise 3 boules parmi les 3+2+3=8 boules de la troisième urne ($\binom{8}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 3 boules noires parmi les 4 boules noires ($\binom{4}{3}$ choix) ou 3 boules vertes parmi les 3 boules vertes ($\binom{3}{3}$ choix), donc on a*

$$P_{U_3}(A) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56}$$

Fin des calculs intermédiaires
On en déduit que

$$\begin{aligned} P(A) &= P(U_1)P_{U_1}(A) + P(U_2)P_{U_2}(A) + P(U_3)P_{U_3}(A) \\ &= \frac{3}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{56} = \frac{139}{560} \simeq 0.248 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 24,8 \% de chance d'obtenir 3 boules de même couleur}}$$

b) On introduit l'évènement

C : " obtenir 3 boules de couleur distinctes à l'issue de l'expérience "

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (U_1, U_2, U_3), ce qui nous donne

$$P(C) = P(U_1 \cap C) + P(U_2 \cap C) + P(U_3 \cap C)$$

Les évènements $U_1 \cap C$ et $U_2 \cap C$ sont impossibles car, dans les deux cas, on pioche dans des urnes contenant uniquement deux couleurs donc il est impossible d'obtenir 3 boules de couleurs distinctes.
Par contre, l'évènement $U_3 \cap C$ est possible, on ne peut le réinterpréter, ce qui nous amène à utiliser la formule de conditionnement, et l'on a

$$P(C) = P(U_3)P_{U_3}(C) = \frac{1}{6} \times \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{3}{56} \simeq 0.054 \pm 10^{-3}$$

$$\boxed{\text{On a environ 5,4 \% de chance d'obtenir 3 boules de couleurs distinctes}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :
On a déjà vu que $\boxed{P(U_3)} = \frac{1}{6}$.

$\boxed{P_{U_3}(C)}$ *: l'évènement U_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement C, c'est-à-dire que le dé donne le numéro 6 (donc on pioche trois boules sans remise dans la troisième urne) et on souhaite obtenir 3 boules de couleurs distinctes (autrement dit, une noire, une blanche et une verte). Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_3}(C)$ est la probabilité de piocher sans remise trois boules dans la troisième urne, qui contient 3 noires, 2 blanches et 3 vertes. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 3+2+3=8 boules présentes dans la troisième urne ($\binom{8}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 1 boule noire parmi les 3 boules noires ($\binom{3}{1}$ choix), 1 boule blanche parmi les 2 boules blanches ($\binom{2}{1}$ choix) et 1 boule verte parmi les 3 boules vertes ($\binom{3}{1}$ choix) donc $P_{U_3}(C) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}$*

correction de l'exercice 8

Le protocole de pioche dépend intimement du choix de l'urne où l'on pioche. On introduit naturellement les évènements

$$U_k : \text{" piocher dans l'urne numéro } k \text{ "}$$

(par exemple, U_4 : " piocher dans l'urne numéro 4 "). Puisque chaque urne a la même probabilité d'être choisie qu'une autre, on a

$$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = P(U_4) = P(U_5) = \frac{1}{5}$$

L'urne U_1 contient 1 boule noire et 9 boules blanches
L'urne U_2 contient 2 boules noires et 8 boules blanches
L'urne U_3 contient 3 boules noires et 7 boules blanches
L'urne U_4 contient 4 boules noires et 6 boules blanches
L'urne U_5 contient 5 boules noires et 5 boules blanches

1. On considère, pour $k = 0, 1, 2$ et 3, l'évènement

$$B_k : \text{" piocher } k \text{ boules blanches "}$$

(par exemple, B_2 : " piocher 2 boules blanches ")
Calcul de $P(B_0)$: On applique la formule des probabilités totales à la famille $(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5)$, ce qui nous donne

$$P(B_0) = P(U_1 \cap B_0) + P(U_2 \cap B_0) + P(U_3 \cap B_0) + P(U_4 \cap B_0) + P(U_5 \cap B_0)$$

Les évènements $U_1 \cap B_0$ et $U_2 \cap B_0$ sont impossibles car, les tirages étant sans remise, on est sur de piocher au moins deux boules blanches dans la première urne et au moins une boule blanche dans la seconde
Les autres évènements sont possibles, on ne peut les réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(U_3)P_{U_3}(B_0) + P(U_4)P_{U_4}(B_0) + P(U_5)P_{U_5}(B_0) = \frac{1}{5} \times \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{120} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{30} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{40} = 0.025 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 2,5 \% de chance de n'avoir aucune boule blanche}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :

$\boxed{P_{U_3}(B_0)}$ *: l'évènement U_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_0, c'est-à-dire que l'on pioche dans la troisième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 0 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_3}(B_0)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules noires en piochant 3 boules sans remise dans la troisième urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_3 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 3 boules noires parmi les 3 boules noires ($\binom{3}{3}$ choix) donc $P_{U_3}(B_0) = \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}$*

$\boxed{P_{U_4}(B_0)}$ *: l'évènement U_4 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_0, c'est-à-dire que l'on pioche dans la quatrième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 0 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_4}(B_0)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules noires en piochant 3 boules sans remise dans la quatrième urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_4 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 3 boules noires parmi les 4 boules noires ($\binom{4}{3}$ choix) donc $P_{U_4}(B_0) = \dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}$*

$\boxed{P_{U_5}(B_0)}$ *: l'évènement U_5 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_0, c'est-à-dire que l'on pioche dans la cinquième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 0 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_5}(B_0)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules noires en piochant 3 boules sans remise dans la cinquième* *urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_5 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 3 boules noires parmi les 5 boules noires ($\binom{5}{3}$ choix) donc $P_{U_5}(B_0) = \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}$*

Calcul de $P(B_1)$: On applique la formule des probabilités totales à la famille $(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5)$, ce qui nous donne

$$P(B_1) = P(U_1 \cap B_1) + P(U_2 \cap B_1) + P(U_3 \cap B_1) + P(U_4 \cap B_1) + P(U_5 \cap B_1)$$

L'évènement $U_1 \cap B_1$ est impossible car, les pioches étant sans remise, on est certain d'avoir au moins 2 boules blanches dans la première urne. Tous les autres évènements sont possibles, on ne peut les réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P(U_2)P_{U_2}(B_1) + P(U_3)P_{U_3}(B_1) + P(U_4)P_{U_4}(B_1) + P(U_5)P_{U_5}(B_1) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{15} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{40} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{12} = \frac{23}{120} \simeq 0.192 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 19,2 \% de chance d' avoir 1 boule blanche}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :

$\boxed{P_{U_2}(B_1)}$ *: l'évènement U_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_1, c'est-à-dire que l'on pioche dans la seconde urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 1 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_2}(B_1)$ est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant 3 boules sans remise dans la deuxième urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_2 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 1 boule blanche parmi les 8 boules blanches disponibles ($\binom{8}{1}$ choix) et 2 boules noires parmi les 2 boules noires ($\binom{2}{2}$ choix) donc $P_{U_2}(B_1) = \dfrac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}}$*

$\boxed{P_{U_3}(B_1)}$ *: l'évènement U_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_1, c'est-à-dire que l'on pioche dans la troisième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 1 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_3}(B_1)$ est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant 3 boules sans remise dans la troisième urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_3 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 1 boule blanche parmi les 7 boules blanches disponibles ($\binom{7}{1}$ choix) et 2 boules noires parmi les 3 boules noires ($\binom{3}{2}$ choix) donc $P_{U_3}(B_1) = \dfrac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}}$*

$P_{U_4}(B_1)$: l'évènement U_4 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_1, c'est-à-dire que l'on pioche dans la quatrième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 1 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $\boxed{P_{U_4}(B_1)}$ est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant 3 boules sans remise. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_4 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 1 boule blanche parmi les 6 boules blanches ($\binom{6}{1}$ choix) et on choisit 2 boules noires parmi les 4 boules noires ($\binom{4}{2}$ choix) donc $P_{U_4}(B_1) = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}}$

$\boxed{P_{U_5}(B_1)}$ *: l'évènement U_5 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_1, c'est-à-dire que l'on pioche dans la cinquième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 1 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_5}(B_1)$ est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant 3 boules sans remise. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_5 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 1 boule blanche parmi les 5 boules blanches ($\binom{5}{1}$ choix) et on choisit 2 boules noires parmi les 5 boules noires ($\binom{5}{2}$ choix) donc $P_{U_5}(B_1) = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}$*

Calcul de $P(B_2)$: On applique la formule des probabilités totales à la famille $(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5)$, ce qui nous donne

$$P(B_2) = P(U_1 \cap B_2) + P(U_2 \cap B_2) + P(U_3 \cap B_2) + P(U_4 \cap B_2) + P(U_5 \cap B_2)$$

Tous les évènements sont possibles, on ne peut les réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(U_1)P_{U_1}(B_2) + P(U_2)P_{U_2}(B_2) + P(U_3)P_{U_3}(B_2) + P(U_4)P_{U_4}(B_2) + P(U_5)P_{U_5}(B_2) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{\binom{9}{2}\binom{1}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{15} + \frac{1}{5} \times \frac{21}{40} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{5}{12} = \frac{53}{120} \simeq 0.442 \pm 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 44,2 \% de chance d' avoir 2 boules blanches}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :

$\boxed{P_{U_1}(B_2)}$ *: l'évènement U_1 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_2, c'est-à-dire que l'on pioche dans la première urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_1}(B_2)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules sans remise dans la première urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_1 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 2 boules blanches parmi les 9 boules blanches disponibles ($\binom{9}{2}$ choix) et 1 boule noire parmi l'unique boule noire ($\binom{1}{1}$ choix) donc $P_{U_1}(B_2) = \dfrac{\binom{9}{2}\binom{1}{1}}{\binom{10}{3}}$*

$\boxed{P_{U_2}(B_2)}$ *: l'évènement U_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_2, c'est-à-dire que l'on pioche dans la seconde urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_2}(B_1)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules sans remise dans la deuxième urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_2 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 2 boules blanches parmi les 8 boules blanches disponibles ($\binom{8}{2}$ choix) et 1 boule noire parmi les 2 boules noires ($\binom{2}{1}$ choix) donc $P_{U_2}(B_2) = \dfrac{\binom{8}{2}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}}$*

$\boxed{P_{U_3}(B_2)}$ *: l'évènement U_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_2, c'est-à-dire que l'on pioche dans la troisième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_3}(B_2)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules sans remise dans la troisième urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_3 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 2 boules blanches parmi les 7 boules blanches disponibles ($\binom{7}{2}$ choix) et 1 boule noire parmi les 3 boules noires ($\binom{3}{1}$ choix) donc $P_{U_3}(B_2) = \dfrac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}}$*

$P_{U_4}(B_2)$: l'évènement U_4 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_2, c'est-à-dire que l'on pioche dans la quatrième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $\boxed{P_{U_4}(B_2)}$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules sans remise. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_4 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 2 boules blanches parmi les 6 boules blanches ($\binom{6}{2}$ choix) et on choisit 1 boule noire parmi les 4 boules noires ($\binom{4}{1}$ choix) donc $P_{U_4}(B_2) = \dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}$

$\boxed{P_{U_5}(B_2)}$ *: l'évènement U_5 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_2, c'est-à-dire que l'on pioche dans la cinquième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_5}(B_2)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules sans remise. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_5 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas favorables, on choisit 2 boules blanches parmi les 5 boules blanches ($\binom{5}{2}$ choix) et on choisit 1 boule noire parmi les 5 boules noires ($\binom{5}{1}$ choix) donc $P_{U_5}(B_2) = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$*

Calcul de $P(B_3)$: On applique la formule des probabilités totales à la famille $(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5)$, ce qui nous donne

$$P(B_3) = P(U_1 \cap B_3) + P(U_2 \cap B_3) + P(U_3 \cap B_3) + P(U_4 \cap B_3) + P(U_5 \cap B_3)$$

Tous les évènements sont possibles, on ne peut les réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned}
P(B_3) &= P(U_1)P_{U_1}(B_3) + P(U_2)P_{U_2}(B_3) + P(U_3)P_{U_3}(B_3) + P(U_4)P_{U_4}(B_3) + P(U_5)P_{U_5}(B_3) \\
&= \frac{1}{5} \times \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{1}{5} \times \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} \\
&= \frac{1}{5} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{15} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{24} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{41}{120} \simeq 0.342 \pm 10^{-3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 34,2 \% de chance d' avoir 3 boules blanches}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :

$\boxed{P_{U_1}(B_3)}$ *: l'évènement U_1 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_3, c'est-à-dire que l'on pioche dans la première urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_1}(B_3)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules sans remise dans la première urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne U_1 ($\binom{10}{3}$ choix), pour les cas* *favorables, on choisit 3 boules blanches parmi les 9 boules blanches disponibles (* $\binom{9}{3}$ *choix) donc* $P_{U_1}(B_3) = \dfrac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}$

$\boxed{P_{U_2}(B_3)}$ *: l'évènement* U_2 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* B_3*, c'est-à-dire que l'on pioche dans la seconde urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_2}(B_3)$ *est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules sans remise dans la deuxième urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne* U_2 *(* $\binom{10}{3}$ *choix), pour les cas favorables, on choisit 3 boules blanches parmi les 8 boules blanches disponibles (* $\binom{8}{3}$ *choix) donc* $P_{U_2}(B_2) = \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}}$

$\boxed{P_{U_3}(B_3)}$ *: l'évènement* U_3 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* B_3*, c'est-à-dire que l'on pioche dans la troisième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_3}(B_3)$ *est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules sans remise dans la troisième urne. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne* U_3 *(* $\binom{10}{3}$ *choix), pour les cas favorables, on choisit 3 boules blanches parmi les 7 boules blanches disponibles (* $\binom{7}{3}$ *choix) donc* $P_{U_3}(B_3) = \dfrac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}}$

$\boxed{P_{U_4}(B_3)}$ *: l'évènement* U_4 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* B_3*, c'est-à-dire que l'on pioche dans la quatrième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_4}(B_3)$ *est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules sans remise. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne* U_4 *(* $\binom{10}{3}$ *choix), pour les cas favorables, on choisit 3 boules blanches parmi les 6 boules blanches (* $\binom{6}{3}$ *choix) donc* $P_{U_4}(B_3) = \dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$

$\boxed{P_{U_5}(B_3)}$ *: l'évènement* U_5 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* B_3*, c'est-à-dire que l'on pioche dans la cinquième urne 3 boules sans remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_5}(B_3)$ *est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules sans remise. Pour les cas possibles, on choisit 3 boules parmi les 10 boules présentes dans l'urne* U_5 *(* $\binom{10}{3}$ *choix), pour les cas favorables, on choisit 3 boules blanches parmi les 5 boules blanches (* $\binom{5}{3}$ *choix) donc* $P_{U_5}(B_3) = \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}$

2. On considère, pour $k = 0, 1, 2$ et 3, l'évènement

$$B_k : \text{" piocher } k \text{ boules blanches "}$$

(par exemple, B_2 : " piocher 2 boules blanches ")
Calcul de $P(B_0)$: On applique la formule des probabilités totales à la famille $(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5)$, ce qui nous donne

$$P(B_0) = P(U_1 \cap B_0) + P(U_2 \cap B_0) + P(U_3 \cap B_0) + P(U_4 \cap B_0) + P(U_5 \cap B_0)$$

Tous les évènements sont possibles (car on remise les boules), on ne peut les réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned} P(B_0) &= P(U_1)P_{U_1}(B_0) + P(U_2)P_{U_2}(B_0) + P(U_3)P_{U_3}(B_0) + P(U_4)P_{U_4}(B_0) + P(U_5)P_{U_5}(B_0) \\ &= \frac{1}{5} \times (\frac{1}{10})^3 + \frac{1}{5} \times (\frac{2}{10})^3 + \frac{1}{5} \times (\frac{3}{10})^3 + \frac{1}{5} \times (\frac{4}{10})^3 + \frac{1}{5} \times (\frac{5}{10})^3 = \frac{9}{200} = 0.045 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a 4,5 \% de chance de n'avoir aucune boule blanche}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :
$\boxed{P_{U_1}(B_0)}$ *: l'évènement* U_1 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* B_0*, c'est-à-dire que l'on pioche dans la première urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 0 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_1}(B_0)$ *est la probabilité d'obtenir 3 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la première urne. On a donc* $P_{U_1}(B_0) = P(NNN) = (\frac{1}{10})^3$ *(il y a 1 boule noire et 9 boules blanches)*

$\boxed{P_{U_2}(B_0)}$ *: l'évènement* U_2 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* B_0*, c'est-à-dire que l'on pioche dans la deuxième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 0 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_2}(B_0)$ *est la probabilité d'obtenir 3 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la deuxième urne. On a donc* $P_{U_2}(B_0) = P(NNN) = (\frac{2}{10})^3$ *(il y a 2 boules noires et 8 boules blanches)*

$\boxed{P_{U_3}(B_0)}$ *: l'évènement* U_3 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* B_0*, c'est-à-dire que l'on pioche dans la troisième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 0 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_3}(B_0)$ *est la probabilité d'obtenir 3 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la troisième* *urne. On a donc* $P_{U_3}(B_0) = P(NNN) = (\frac{3}{10})^3$ *(il y a 3 boules noires et 7 boules blanches)*

$\boxed{P_{U_4}(B_0)}$ *: l'évènement U_4 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_0, c'est-à-dire que l'on pioche dans la quatrième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 0 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_4}(B_0)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la quatrième urne. On a donc $P_{U_4}(B_0) = P(NNN) = (\frac{4}{10})^3$ (il y a 4 boules noires et 6 boules blanches)*

$\boxed{P_{U_5}(B_0)}$ *: l'évènement U_5 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_0, c'est-à-dire que l'on pioche dans la cinquième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 0 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_5}(B_0)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la cinquième urne. On a donc $P_{U_5}(B_0) = P(NNN) = (\frac{5}{10})^3$ (il y a 5 boules noires et 5 boules blanches)*

Calcul de $P(B_1)$: On applique la formule des probabilités totales à la famille $(U_1, U_2, U_3, U_4, U_5)$, ce qui nous donne

$$P(B_1) = P(U_1 \cap B_1) + P(U_2 \cap B_1) + P(U_3 \cap B_1) + P(U_4 \cap B_1) + P(U_5 \cap B_1)$$

Tous les évènements sont possibles (on remise les boules), on ne peut les réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= P(U_1)P_{U_1}(B_1) + P(U_2)P_{U_2}(B_1) + P(U_3)P_{U_3}(B_1) + P(U_4)P_{U_4}(B_1) + P(U_5)P_{U_5}(B_1) \\
&= \frac{1}{5} \times \binom{3}{1}(\frac{9}{10})(\frac{1}{10})^2 + \frac{1}{5} \times \binom{3}{1}(\frac{8}{10})(\frac{2}{10})^2 + \frac{1}{5} \times \binom{3}{1}(\frac{7}{10})(\frac{3}{10})^2 + \frac{1}{5} \times \binom{3}{1}(\frac{6}{10})(\frac{4}{10})^2 + \frac{1}{5} \times \binom{3}{1}(\frac{5}{10})(\frac{5}{10})^2 \\
&= \frac{39}{200} = 0.195
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a environ 19,5 \% de chance d' avoir 1 boule blanche}}$

Justification des calculs de probabilités précédents :

$\boxed{P_{U_1}(B_1)}$ *: l'évènement U_1 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_1, c'est-à-dire que l'on pioche dans la première urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 1 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_1}(B_1)$ est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la première urne. L'urne contient 1 boule noire et 9 boules blanches.*
On a donc

$$\begin{aligned}
P_{U_1}(B_0) &= P[(NNB) \cup (NBN) \cup (BNN)] = P(NNB) + P(NBN) + P(BNN) \\
&= (\frac{9}{10})(\frac{1}{10})^2 + (\frac{9}{10})(\frac{1}{10})^2 + (\frac{9}{10})(\frac{1}{10})^2 = 3(\frac{9}{10})(\frac{1}{10})^2
\end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 1 pioche parmi les 3 pioches donc on a* $\binom{3}{1} = 3$ *choix*

$\boxed{P_{U_2}(B_1)}$ *: l'évènement U_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_1, c'est-à-dire que l'on pioche dans la deuxième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 1 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_2}(B_1)$ est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la deuxième urne. L'urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches.*
On a donc

$$\begin{aligned}
P_{U_2}(B_1) &= P[(NNB) \cup (NBN) \cup (BNN)] = P(NNB) + P(NBN) + P(BNN) \\
&= (\frac{8}{10})(\frac{2}{10})^2 + (\frac{8}{10})(\frac{2}{10})^2 + (\frac{8}{10})(\frac{2}{10})^2 = 3(\frac{8}{10})(\frac{2}{10})^2
\end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 1 pioche parmi les 3 pioches donc on a* $\binom{3}{1} = 3$ *choix*

$\boxed{P_{U_3}(B_1)}$ *: l'évènement U_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_3, c'est-à-dire que l'on pioche dans la troisième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 1 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_3}(B_1)$ est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la troisième urne. L'urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches.*
On a donc

$$\begin{aligned}
P_{U_3}(B_0) &= P[(NNB) \cup (NBN) \cup (BNN)] = P(NNB) + P(NBN) + P(BNN) \\
&= (\frac{7}{10})(\frac{3}{10})^2 + (\frac{7}{10})(\frac{3}{10})^2 + (\frac{7}{10})(\frac{3}{10})^2 = 3(\frac{7}{10})(\frac{3}{10})^2
\end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 1 pioche parmi les 3 pioches donc on a* $\binom{3}{1} = 3$ *choix*

$\boxed{P_{U_4}(B_1)}$ *: l'évènement U_4 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_1, c'est-à-dire que l'on pioche*

dans la quatrième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 1 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_4}(B_1)$ est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la quatrième urne. L'urne contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
On a donc

$$\begin{aligned} P_{U_4}(B_1) &= P\left[(NNB)\cup(NBN)\cup(BNN)\right] = P(NNB)+P(NBN)+P(BNN) \\ &= (\frac{6}{10})(\frac{4}{10})^2+(\frac{6}{10})(\frac{4}{10})^2+(\frac{6}{10})(\frac{4}{10})^2 = 3(\frac{6}{10})(\frac{4}{10})^2 \end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 1 pioche parmi les 3 pioches donc on a $\binom{3}{1}=3$ choix*

$\boxed{P_{U_5}(B_1)}$ *: l'évènement U_5 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_1, c'est-à-dire que l'on pioche dans la cinquième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 1 boule blanche. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_4}(B_1)$ est la probabilité d'obtenir 1 boule blanche et 2 boules noires en piochant 3 boules avec remise dans la cinquième urne. L'urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.*
On a donc

$$\begin{aligned} P_{U_5}(B_1) &= P\left[(NNB)\cup(NBN)\cup(BNN)\right] = P(NNB)+P(NBN)+P(BNN) \\ &= (\frac{5}{10})(\frac{5}{10})^2+(\frac{5}{10})(\frac{5}{10})^2+(\frac{5}{10})(\frac{5}{10})^2 = 3(\frac{5}{10})(\frac{5}{10})^2 \end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 1 pioche parmi les 3 pioches donc on a $\binom{3}{1}=3$ choix*

Calcul de $P(B_2)$: On applique la formule des probabilités totales à la famille (U_1,U_2,U_3,U_4,U_5), ce qui nous donne

$$P(B_1)=P(U_1\cap B_1)+P(U_2\cap B_1)+P(U_3\cap B_1)+P(U_4\cap B_1)+P(U_5\cap B_1)$$

Tous les évènements sont possibles (on remise les boules), on ne peut les réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(U_1)P_{U_1}(B_2)+P(U_2)P_{U_2}(B_2)+P(U_3)P_{U_3}(B_2)+P(U_4)P_{U_4}(B_2)+P(U_5)P_{U_5}(B_2) \\ &= \frac{1}{5}\times\binom{3}{2}(\frac{9}{10})^2(\frac{1}{10})+\frac{1}{5}\times\binom{3}{2}(\frac{8}{10})^2(\frac{2}{10})+\frac{1}{5}\times\binom{3}{2}(\frac{7}{10})^2(\frac{3}{10})+\frac{1}{5}\times\binom{3}{2}(\frac{6}{10})^2(\frac{4}{10})+\frac{1}{5}\times\binom{3}{2}(\frac{5}{10})^2(\frac{5}{10}) \\ &= \frac{3}{8}=0.375 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a environ 37,5 \% de chance d' avoir 2 boules blanches}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :

$\boxed{P_{U_1}(B_2)}$ *: l'évènement U_1 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_2, c'est-à-dire que l'on pioche dans la première urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_1}(B_2)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules avec remise dans la première urne. L'urne contient 1 boule noire et 9 boules blanches.*
On a donc

$$\begin{aligned} P_{U_1}(B_2) &= P\left[(NBB)\cup(BNB)\cup(BBN)\right] = P(NBB)+P(BNB)+P(BBN) \\ &= (\frac{9}{10})^2(\frac{1}{10})+(\frac{9}{10})^2(\frac{1}{10})+(\frac{9}{10})^2(\frac{1}{10}) = 3(\frac{9}{10})^2(\frac{1}{10}) \end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 2 pioches parmi les 3 pioches donc on a $\binom{3}{2}=3$ choix*

$\boxed{P_{U_2}(B_2)}$ *: l'évènement U_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_2, c'est-à-dire que l'on pioche dans la deuxième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_2}(B_2)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules avec remise dans la deuxième urne. L'urne contient 2 boules noires et 8 boules blanches.*
On a donc

$$\begin{aligned} P_{U_2}(B_1) &= P\left[(NBB)\cup(BNB)\cup(BBN)\right] = P(NBB)+P(BNB)+P(BBN) \\ &= (\frac{8}{10})^2(\frac{2}{10})+(\frac{8}{10})^2(\frac{2}{10})+(\frac{8}{10})^2(\frac{2}{10}) = 3(\frac{8}{10})^2(\frac{2}{10}) \end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 2 pioches parmi les 3 pioches donc on a $\binom{3}{2}=3$ choix*

$\boxed{P_{U_3}(B_2)}$ *: l'évènement U_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_3, c'est-à-dire que l'on pioche dans la troisième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_3}(B_2)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules avec remise*

dans la troisième urne. L'urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches.
On a donc

$$\begin{aligned} P_{U_3}(B_0) &= P[(NBB)\cup(BNB)\cup(BBN)] = P(NBB)+P(BNB)+P(BBN) \\ &= (\frac{7}{10})^2(\frac{3}{10})+(\frac{7}{10})^2(\frac{3}{10})+(\frac{7}{10})^2(\frac{3}{10}) = 3(\frac{7}{10})^2(\frac{3}{10}) \end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 2 pioches parmi les 3 pioches donc on a* $\binom{3}{2}=3$ *choix*

$\boxed{P_{U_4}(B_2)}$ *: l'évènement U_4 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_2, c'est-à-dire que l'on pioche dans la quatrième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_4}(B_2)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules avec remise dans la quatrième urne. L'urne contient 4 boules noires et 6 boules blanches.*
On a donc

$$\begin{aligned} P_{U_4}(B_2) &= P[(NBB)\cup(BNB)\cup(BBN)] = P(NBB)+P(BNB)+P(BBN) \\ &= (\frac{6}{10})^2(\frac{4}{10})+(\frac{6}{10})^2(\frac{4}{10})+(\frac{6}{10})^2(\frac{4}{10}) = 3(\frac{6}{10})^2(\frac{4}{10}) \end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 2 pioches parmi les 3 pioches donc on a* $\binom{3}{2}=3$ *choix*

$\boxed{P_{U_5}(B_2)}$ *: l'évènement U_5 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_2, c'est-à-dire que l'on pioche dans la cinquième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 2 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_4}(B_5)$ est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches et 1 boule noire en piochant 3 boules avec remise dans la cinquième urne. L'urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.*
On a donc

$$\begin{aligned} P_{U_5}(B_2) &= P[(NBB)\cup(BNB)\cup(BBN)] = P(NBB)+P(BNB)+P(BBN) \\ &= (\frac{5}{10})^2(\frac{5}{10})+(\frac{5}{10})^2(\frac{5}{10})+(\frac{5}{10})^2(\frac{5}{10}) = 3(\frac{5}{10})^2(\frac{5}{10}) \end{aligned}$$

Remarque *: On choisit 2 pioches parmi les 3 pioches donc on a* $\binom{3}{2}=3$ *choix*

Calcul de $P(B_3)$: On applique la formule des probabilités totales à la famille (U_1,U_2,U_3,U_4,U_5), ce qui nous donne

$$P(B_3) = P(U_1\cap B_3)+P(U_2\cap B_3)+P(U_3\cap B_3)+P(U_4\cap B_3)+P(U_5\cap B_3)$$

Tous les évènements sont possibles (car on remise les boules), on ne peut les réinterpréter donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned} P(B_3) &= P(U_1)P_{U_1}(B_3)+P(U_2)P_{U_2}(B_3)+P(U_3)P_{U_3}(B_3)+P(U_4)P_{U_4}(B_3)+P(U_5)P_{U_5}(B_3) \\ &= \frac{1}{5}\times(\frac{9}{10})^3+\frac{1}{5}\times(\frac{8}{10})^3+\frac{1}{5}\times(\frac{7}{10})^3+\frac{1}{5}\times(\frac{6}{10})^3+\frac{1}{5}\times(\frac{5}{10})^3 = \frac{77}{200} = 0.385 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a 38,5 \% de chance d'avoir 3 boules blanches}}$$

Justification des calculs de probabilités précédents :

$\boxed{P_{U_1}(B_3)}$ *: l'évènement U_1 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_3, c'est-à-dire que l'on pioche dans la première urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_1}(B_3)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules avec remise dans la première urne. On a donc $P_{U_1}(B_3)=P(BBB)=(\frac{9}{10})^3$ (il y a 1 boule noire et 9 boules blanches)*

$\boxed{P_{U_2}(B_3)}$ *: l'évènement U_2 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_3, c'est-à-dire que l'on pioche dans la deuxième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_2}(B_3)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules avec remise dans la deuxième urne. On a donc $P_{U_2}(B_3)=P(BBB)=(\frac{8}{10})^3$ (il y a 2 boules noires et 8 boules blanches)*

$\boxed{P_{U_3}(B_3)}$ *: l'évènement U_3 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_3, c'est-à-dire que l'on pioche dans la troisième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_3}(B_3)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules avec remise dans la troisième urne. On a donc $P_{U_3}(B_3)=P(BBB)=(\frac{7}{10})^3$ (il y a 3 boules noires et 7 boules blanches)*

$\boxed{P_{U_4}(B_3)}$ *: l'évènement U_4 est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_3, c'est-à-dire que l'on pioche dans la quatrième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle $P_{U_4}(B_3)$ est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules avec remise dans la quatrième* *urne. On a donc* $P_{U_4}(B_3) = P(BBB) = (\frac{6}{10})^3$ *(il y a 4 boules noires et 6 boules blanches)*

$\boxed{P_{U_5}(B_3)}$ *: l'évènement* U_5 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement* B_3*, c'est-à-dire que l'on pioche dans la cinquième urne 3 boules avec remise et on souhaite obtenir 3 boules blanches. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_5}(B_3)$ *est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches en piochant 3 boules avec remise dans la cinquième urne. On a donc* $P_{U_5}(B_3) = P(BBB) = (\frac{5}{10})^3$ *(il y a 5 boules noires et 5 boules blanches)*

correction de l'exercice 9

Le protocole de pioche dépend étroitement du choix de l'urne où l'on pioche. On introduit alors naturellement, pour $k = 1, 2, ..., n$, les évènements

$$U_k \text{ " piocher dans l'urne numéro } k \text{ "}$$

(par exemple, U_2 : " piocher dans l'urne numéro 2 ") ainsi que l'évènement

$$\text{V : " piocher une boule verte "}$$

On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $U_1, U_2, .., U_k, .., U_n$, ce qui nous donne :

$$P(V) = P(U_1 \cap V) + P(U_2 \cap V) + \cdots + P(U_k \cap V) + \cdots + P(U_n \cap V)$$

Tous les évènements précédents sont possibles, on ne peut les réinterpréter, donc on applique la formule de conditionnement

$$\begin{aligned} P(V) &= P(U_1)P_{U_1}(V) + P(U_2)P_{U_2}(V) + \cdots + P(U_k)P_{U_k}(V) + \cdots + P(U_n)P_{U_n}(V) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \times \frac{2}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{k}{2k} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{n}{2n} \\ &= \underbrace{\frac{1}{n} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} = n \times (\frac{1}{n} \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a 50 \% de chance de piocher une boule verte}}$$

Justifications des calculs de probabilités précédentes :

La probabilité de choisir une urne donnée est la même que de choisir une autre et étant donné qu'il y a n urne, on

$$P(U_1) = P(U_2) = \cdots = P(U_k) = \cdots = P(U_n) = \frac{1}{n}$$

$\boxed{P_{U_1}(V)}$ *: l'évènement* U_1 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement V, c'est-à-dire que l'on pioche dans l'urne numéro 1, et que l'on pioche 1 boule verte. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_1}(V)$ *est la probabilité de piocher une boule verte dans l'urne numéro 1 en piochant une boule donc* $P_{U_1}(V) = \frac{1}{2}$ *(l'urne contient 1 boule verte et 1 boule rouge)*

$\boxed{P_{U_2}(V)}$ *: l'évènement* U_2 *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement V, c'est-à-dire que l'on pioche dans l'urne numéro 2, et que l'on pioche 1 boule verte. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_2}(V)$ *est la probabilité de piocher une boule verte dans l'urne numéro 2 en piochant une boule donc* $P_{U_2}(V) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ *(l'urne contient 2 boules vertes et 2 boules rouges)*

....

$\boxed{P_{U_k}(V)}$ *: l'évènement* U_k *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement V, c'est-à-dire que l'on pioche dans l'urne numéro k, et que l'on pioche 1 boule verte. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_k}(V)$ *est la probabilité de piocher une boule verte dans l'urne numéro k en piochant une boule donc* $P_{U_k}(V) = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$ *(l'urne contient k boules vertes et k boules rouges)On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne n°k contient k boules vertes et k boules rouges. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne.*

....

$\boxed{P_{U_n}(V)}$ *: l'évènement* U_n *est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement V, c'est-à-dire que l'on pioche dans l'urne numéro n, et que l'on pioche 1 boule verte. Par conséquent, la probabilité conditionnelle* $P_{U_n}(V)$ *est la probabilité de piocher une boule verte dans l'urne numéro n en piochant une boule donc* $P_{U_n}(V) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ *(l'urne contient n boules vertes et n boules rouges)*