correction de l'exercice 1

1. On introduit l'évènement R_k : " la place est réservée le jour k " et donc $p(R_k) = r_k$.
   Le système $(R_k, \overline{R_k})$ est un système complet d'évènements et l'on a :

$$\begin{aligned} p(R_{k+1}) &= p(R_k \cap R_{k+1}) + p(\overline{R_k} \cap R_{k+1}) = p(R_k)p_{R_k}(R_{k+1}) + p(\overline{R_k})p_{\overline{R_k}}(R_{k+1}) \\ &= \frac{9}{10}p(R_k) + \frac{4}{10}p(\overline{R_k}) \end{aligned}$$

   Justification des calculs de probabilités conditionnelles :
   $p_{R_k}(R_{k+1})$ *: l'évènement R_k est réalisé, donc la place est réservée le jour k, et l'on souhaite que la place soit encore réservée le jour $k+1$. D'après l'énoncé, la probabilité de réalisation de cet évènement est* $\frac{9}{10}$.
   $p_{\overline{R_k}}(R_{k+1})$ *: l'évènement $\overline{R_k}$ est réalisé, donc la place est libre le jour k, et l'on souhaite que la place soit réservée le jour $k+1$. D'après l'énoncé, la probabilité de réalisation de cet évènement est* $\frac{4}{10}$
   En remarquant ensuite que $p(R_k) = r_k$ et $p(\overline{R_k}) = 1 - p(R_k) = 1 - r_k$, on obtient

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad r_{k+1} = \frac{9}{10}r_k + \frac{4}{10}(1 - r_k) = \frac{1}{2}r_k + \frac{2}{5}.}$$

2. La suite r est arithmético-géométrique.
   Recherche de la constante L :

$$L = \frac{1}{2}L + \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2}L = \frac{2}{5} \Leftrightarrow L = 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

   On introduit alors la suite u définie par : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = r_k - \frac{4}{5} \Leftrightarrow r_k = u_k + \frac{4}{5}$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} = r_{k+1} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2}r_k + \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2}(u_k + \frac{4}{5}) - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}u_k$$

   La suite u est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, ce qui nous permet d'écrire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \frac{1}{2^k}u_0 \Leftrightarrow r_k - \frac{4}{5} = \frac{1}{2^k}\left(r_0 - \frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \boxed{r_k = \frac{4}{5} - \frac{4}{5 \times 2^k} \text{ et } r = \lim_{k \to +\infty} r_k = \frac{4}{5}}$$

   Remarque : $r_k \underset{k\to+\infty}{\to} \frac{4}{5}$ *signifie qu'à long terme, c'est-à-dire après un grand nombre de jours, la probabilité qu'une place donnée soit réservée est environ égale à* $\frac{4}{5} = 0.8$ *autrement il y a environ 80 % de chance pour qu'une place donnée soit réservée.*

correction de l'exercice 2

1. **Calcul de** $P(B_1)$: Pour obtenir la boule blanche au premier tirage, on doit déjà choisir l'urne. Etant donné que l'on a le choix de l'urne U_1 ou U_2, on introduit les évènements $\mathcal{A}$: " piocher dans l'urne U_1 " et $\mathcal{B}$ " piocher dans l'urne U_2 " Il s'agit clairement d'un système complet d'évènements et l'on a :

$$P(B_1) = P(\mathcal{A} \cap B_1) + P(\mathcal{B} \cap B_2) = P(\mathcal{A})P_{\mathcal{A}}(B_1) + P(\mathcal{B})P_{\mathcal{B}}(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{13}{18} + \frac{1}{2} \times \frac{10}{22} = \frac{233}{396} \Rightarrow \boxed{P(B_1) = \frac{233}{396}}$$

   Justification des calculs de probabilités :
   $P(A)$ *et* $P(B)$ *: Le choix de chaque urne étant équiprobable donc* $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$
   $P_{\mathcal{A}}(B_1)$ *: l'évènement A est réalisé, c'est-à-dire que l'on a choisi l'urne U_1 pour piocher la boule, et l'on souhaite piocher une boule et que cette boule soit blanche. Autrement dit, il s'agit de calculer la probabilité de piocher une boule blanche en un tirage dans l'urne U_1 qui contient 13 boules blanches et 5 boules noires donc* $P_{\mathcal{A}}(B_1) = \frac{13}{13+5} = \frac{13}{18}$
   $P_{\mathcal{B}}(B_1)$ *: l'évènement B est réalisé, c'est-à-dire que l'on a choisi l'urne U_2 pour piocher la boule, et l'on souhaite piocher une boule et que cette boule soit blanche. Autrement dit, il s'agit de calculer la probabilité de piocher une boule blanche en un tirage dans l'urne U_2 qui contient 10 boules blanches et 12 boules noires donc* $P_{\mathcal{B}}(B_1) = \frac{10}{10+12} = \frac{10}{22}$
   Calcul de $P(B_2)$: Pour obtenir une boule blanche au second tirage, on doit savoir dans quelle urne on doit piocher au second tirage, autrement dit, on doit savoir qu'elle est la boule piochée au premier tirage (on pioche soit une boule

blanche, soit une boule noire ce qui est la même chose que de piocher une boule non blanche). On introduit alors le système complet d'évènements $(B_1, \overline{B_1})$ ce qui nous donne

$$P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(\overline{B_1} \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{233}{396} \times \frac{13}{18} + (1 - \frac{233}{396}) \times \frac{10}{22} = \frac{47\,989}{78\,408}$$

Justification des calculs de probabilités conditionnelles :
$P_{B_1}(B_2)$: l'évènement B_1 est réalisé, c'est-à-dire qu'une boule blanche est piochée au premier tirage donc on pioche la seconde boule dans l'urne U_1, et on souhaite piocher une boule blanche au second tirage. Ainsi il s'agit de calculer la probabilité de piocher une boule blanche dans l'urne U_1 donc $P_{B_1}(B_2) = \frac{13}{18}$
$P_{\overline{B_1}}(B_2)$: l'évènement $\overline{B_1}$ est réalisé, c'est-à-dire qu'une boule noire est piochée au premier tirage donc on pioche la seconde boule dans l'urne U_2, et on souhaite piocher une boule blanche au second tirage. Ainsi il s'agit de calculer la probabilité de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 donc $P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{10}{22}$

2. Pour obtenir une boule blanche au n-ième tirage, on doit savoir dans quelle urne on doit piocher au n-ième tirage, autrement dit, on doit savoir qu'elle est la boule piochée au $(n-1)$-ième tirage (on pioche soit une boule blanche, soit une boule noire). On introduit alors le système complet d'évènements $(B_{n-1}, \overline{B_{n-1}})$ ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_{n-1} \cap B_n) + P(\overline{B_{n-1}} \cap B_n) = P(B_{n-1})P_{B_{n-1}}(B_n) + P(\overline{B_{n-1}})P_{\overline{B_{n-1}}}(B_n) = \frac{13}{18}P(B_{n-1}) + \frac{10}{22}P(\overline{B_{n-1}}) \\ &= \frac{13}{18}P(B_{n-1}) + \frac{10}{22}(1 - P(B_{n-1})) = \left(\frac{13}{18} - \frac{10}{22}\right)P(B_{n-1}) + \frac{10}{22} = \frac{53}{198}P(B_{n-1}) + \frac{10}{22} = \frac{53}{198}P(B_{n-1}) + \frac{5}{11} \end{aligned}$$

et l'expression de $P(B_n)$ en fonction de $P(B_{n-1})$ est

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(B_n) = \frac{53}{198}P(B_{n-1}) + \frac{5}{11}}$$

3. La suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
Calcul de la constante L :

$$L = \frac{53}{198}L + \frac{5}{11} \Leftrightarrow \frac{145}{198}L = \frac{5}{11} \Leftrightarrow L = \frac{198}{145} \times \frac{5}{11} = \frac{18}{29}$$

On introduit la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = P(B_n) - \frac{19}{29} \Leftrightarrow P(B_n) = u_n + \frac{19}{29}$

$$u_{n+1} = P(B_{n+1}) - \frac{19}{28} = \frac{53}{198}P(B_{n-1}) + \frac{5}{11} - \frac{18}{29} = \frac{53}{198}\left(u_n + \frac{18}{29}\right) - \frac{53}{319} = \frac{53}{198}u_n$$

La suite u est géométrique de raison $\frac{53}{198}$ donc on a

$$\begin{aligned} \forall n \quad \in \quad \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n = \left(\frac{53}{198}\right)^{n-1} u_1 \Leftrightarrow P(B_n) - \frac{18}{29} = \left(\frac{53}{198}\right)^{n-1}\left(P(B_1) - \frac{18}{29}\right) \\ \Leftrightarrow \boxed{P(B_n) = \frac{18}{29} - \frac{371}{11\,484}\left(\frac{53}{198}\right)^{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \frac{18}{29}} \end{aligned}$$

Remarque : on exprimer u_n en fonction de u_1 et non de u_0 car $P(B_0)$ n'est pas définie mais $P(B_1)$ a un sens et est définie.
Interprétation : Après un nombre suffisamment grand de tirages, la probabilité de piocher une boule blanche à un tirage quelconque est environ égale à $\frac{18}{29} \simeq 0.621 \pm 10^{-3}$, c'est-à-dire qu'après un nombre suffisamment grand de tirages, on a environ 62,1 % de chance de piocher une boule blanche à un tirage

correction de l'exercice 3

1. (a) L'évolution du titre à l'instant $t = n+1$ dépendant clairement de l'évolution du titre à l'instant $t = n$, on introduit

naturellement le système complet d'évènements (M_n, S_n, B_n), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
P(M_{n+1}) &= P(M_n \cap M_{n+1}) + P(S_n \cap M_{n+1}) + P(B_n \cap M_{n+1}) \\
&= P(M_n)P_{M_n}(M_{n+1}) + P(S_n)P_{S_n}(M_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(M_{n+1}) \\
&= (1-2a)P(M_n) + aP(S_n) + aP(B_n) \\
P(S_{n+1}) &= P(M_n \cap S_{n+1}) + P(S_n \cap S_{n+1}) + P(B_n \cap S_{n+1}) \\
&= P(M_n)P_{M_n}(S_{n+1}) + P(S_n)P_{S_n}(S_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(S_{n+1}) \\
&= aP(M_n) + (1-2a)P(S_n) + aP(B_n) \\
P(B_{n+1}) &= P(M_n \cap B_{n+1}) + P(S_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) \\
&= P(M_n)P_{M_n}(B_{n+1}) + P(S_n)P_{S_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) \\
&= aP(M_n) + aP(S_n) + (1-2a)P(B_n)
\end{aligned}$$

ce qui nous fournit les relations de récurrence demandées

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}}$$

Justification des calculs de probabilités conditionnelles :
$P_{M_n}(M_{n+1})$: l'évènement M_n est réalisé, donc le titre a monté le jour n, et l'on souhaite la réalisation de l'évènement M_{n+1}, c'est-à-dire que le titre monte le jour $n+1$. Autrement dit, il s'agit de calculer la probabilité que, si le titre a monté le jour $t = n$, le cours monte le jour $n+1$. Cette probabilité vaut $(1-2a)$ d'après l'énoncé. Les autres probabilités se calculent de la même façon et elles ne posent aucune difficulté.

(b) Puisque le système d'évènements (M_n, S_n, B_n) est complet, on a

$$P(M_n) + P(S_n) + P(B_n) = 1 \Leftrightarrow \boxed{p_n + q_n + r_n = 1} \Rightarrow \boxed{r_n = 1 - p_n - q_n}$$

2. La combinaison des identités démontrées aux questions (1)a. et (1).b nous fournissent les identités suivantes

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + a(1-p_n-q_n) \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + a(1-p_n-q_n) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} p_{n+1} = (1-3a)p_n + a \\ q_{n+1} = (1-3a)q_n + a \end{cases}}$$

3. Puisque p et q vérifient la même relation de récurrence, nous allons simplement effectuer le calcul pour p et nous donnerons directement le résultat pour q
Recherche de la constante L

$$L = (1-3a)L + a \Leftrightarrow 3aL = a \underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} L = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

On introduit la suite u définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = p_n - \frac{1}{3} \Leftrightarrow p_n = u_n + \frac{1}{3}$$

On a alors

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{3} = (1-3a)p_n + a - \frac{1}{3} = (1-3a)(u_n + \frac{1}{3}) + a - \frac{1}{3} = (1-3a)u_n$$

La suite u est géométrique de raison $1-3a$, ce qui nous permet d'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1-3a)^n u_0 \Leftrightarrow p_n - \frac{1}{3} = (1-3a)^n(p_0 - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \frac{1}{3} + (1-3a)^n(p_0 - \frac{1}{3})}$$

et par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = \frac{1}{3} + (1-3a)^n(q_0 - \frac{1}{3})}$$

Détermination des différentes limites :
D'après l'énoncé, on a $0 < a < 1$, ce qui nous donne

$$0 < a < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < 3a < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < -3a < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{2} < 1 - 3a < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 1 - 3a < 1$$

Puisque $1-3a\in]-1,1[$, la suite $\left((1-3a)^n\right)_n$ converge vers 0 et on en déduit immédiatement que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{1}{3}$$

et comme $\forall n\in\mathbb{N},\quad r_n = 1-p_n-q_n$, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{3}}$$

Interprétation : Après un nombre suffisamment grand de jours, il y a équiprobabilité de hausse, de stagnation ou de hausse du titre.

correction de l'exercice 4

1. Puisqu'au temps $t=0$, la guêpe se trouve dans la pièce A, on a évidemment

$$\boxed{a_0 = p(A_0) = 1,\quad b_0 = s_0 = 0.}$$

D'autre part, à l'instant $t=1$, on introduit le système complet d'évènements (A_0,B_0,S_0) (la position de la guêpe dépend de sa position à l'instant $t=0$) ce qui nous donne

$$\begin{aligned} a_1 &= P(A_1) = P(A_0\cap A_1)+P(B_0\cap A_1)+P(S_0\cap A_1)\\ &= P(A_0)P_{A_0}(A_1)+0+0\\ &= 1\times\frac{1}{3}+0+0=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Par la même méthode, on obtient $b_1 = 1\times\frac{2}{3}+0+0=\frac{2}{3}$ et $s_1 = 1\times 0+0+0=0$ donc

$$\boxed{a_1=\frac{1}{3},\quad b_1=\frac{2}{3},\quad s_1=0}$$

2. (a) On introduit le système complet d'évènements (A_n,B_n,S_n) ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n\cap A_{n+1})+P(B_n\cap A_{n+1})+P(S_n\cap A_{n+1})\\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1})+0=\frac{1}{3}P(A_n)+\frac{1}{4}P(B_n)\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\boxed{a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{4}b_n.}$$

Justification des calculs de probabilités :
$P_{A_n}(A_{n+1})$ *: l'évènement A_n est réalisé, c'est-à-dire que la guêpe est dans la pièce A à l'instant $t=n$, et l'on souhaite que la guêpe soit dans la pièce A à l'instant $t=n+1$. D'après l'énoncé, cette probabilité est égale à $\frac{1}{3}$.*
$P_{B_n}(A_{n+1})$ *: l'évènement B_n est réalisé, c'est-à-dire que la guêpe est dans la pièce B à l'instant $t=n$, et l'on souhaite que la guêpe soit dans la pièce A à l'instant $t=n+1$. D'après l'énoncé, cette probabilité est égale à $\frac{1}{4}$.*
$P(S_n\cap A_{n+1})$ *: d'après l'énoncé, lorsque la guêpe sort, elle ne peut plus rentrer. Par conséquent, si la guêpe sort à l'instant $t=n$, elle ne 'peut être dans la pièce A à l'instant $t=n+1$ donc l'évènement $S_n\cap A_{n+1}$ est impossible et $P(S_n\cap A_{n+1})=0$.*
En utilisant le système complet d'évènements (A_n,B_n,S_n), on a

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n\cap B_{n+1})+P(B_n\cap B_{n+1})+P(S_n\cap B_{n+1})\\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})+0=\frac{2}{3}P(A_n)+\frac{1}{2}P(B_n)\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\boxed{b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n.}$$

Justification des calculs de probabilités :
$P_{A_n}(B_{n+1})$ *: l'évènement A_n est réalisé, c'est-à-dire que la guêpe est dans la pièce A à l'instant $t=n$, et l'on*

souhaite que la guêpe soit dans la pièce B à l'instant $t = n+1$. D'après l'énoncé, cette probabilité est égale à $\frac{2}{3}$.
$P_{B_n}(B_{n+1})$ *: l'évènement B_n est réalisé, c'est-à-dire que la guêpe est dans la pièce B à l'instant $t = n$, et l'on souhaite que la guêpe soit dans la pièce B à l'instant $t = n+1$. D'après l'énoncé, cette probabilité est égale à $\frac{1}{2}$.*
$P(S_n \cap B_{n+1})$ *: d'après l'énoncé, lorsque la guêpe sort, elle ne peut plus rentrer. Par conséquent, si la guêpe sort à l'instant $t = n$, elle ne 'peut être dans la pièce B à l'instant $t = n+1$ donc l'évènement $S_n \cap B_{n+1}$ est impossible et $P(S_n \cap B_{n+1}) = 0$.*

(b) Un calcul direct nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{6}{10}a_{n+1} - \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{6}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = 0$$

donc pour tout entier n, $u_{n+1} = 0$ et en effectuant le changement de variable $m = n+1$, on en déduit que

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_m = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n = 0}$$

(c) Un calcul direct nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{4}{10}a_{n+1} + \frac{3}{10}b_{n+1} = \frac{4}{10}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) + \frac{3}{10}\left(\frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n\right) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$$

$$v_{n+1} = \frac{4a_n + 3b_n}{12} = \frac{1}{12}(4a_n + 3b_n) = \frac{10}{12}\left(\frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n\right) = \frac{10}{12}v_n \Rightarrow \boxed{v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n}$$

La suite v est géométrique de raison $\frac{5}{6}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n v_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^n \left(\frac{4}{10}a_0 + \frac{3}{10}b_0\right) = \frac{4}{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

(d) D'après les questions (2)b. et (2)c., on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \begin{cases} u_n = 0 \\ v_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n = 0 \\ \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ \frac{15}{10}b_n = \frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ b_n = \frac{10}{15} \times \frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ b_n = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases}}$$

3. Pour commencer, la guêpe ne peut en aucun cas sortir à l'instant $t = 0$ ou $t = 1$ et elle peut sortir à compter de l'instant $t = 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, en utilisant le système complet d'évènements $(A_{n-1}, B_{n-1}, S_{n-1})$, on a

$$P(S_n) = P(A_{n-1} \cap S_n) + P(B_{n-1} \cap S_n) + P(S_{n-1} \cap S_n) = 0 + P(B_{n-1})P_{B_{n-1}}(S_n) + 0 = \frac{1}{4}P(B_{n-1})$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}, \quad s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}.}$$

Justification des calculs de probabilités :
$P(A_{n-1} \cap S_n)$ *: si la guêpe est dans la pièce A à l'instant $t = n-1$, à l'instant $t = n$ elle ne peut se trouver que dans*

la pièce A ou la pièce B et donc elle ne peut sortir à l'instant $t = n$. Par conséquence, l'évènement $A_{n-1} \cap S_n$ est impossible et $P(A_{n-1} \cap S_n) = 0$
$P_{B_{n-1}}(S_n)$: l'évènement B_{n-1} est réalisé, c'est-à-dire que la guêpe est dans la pièce B à l'instant $t = n-1$, et l'on souhaite que la guêpe sorte à l'instant $t = n$. D'après l'énoncé, cette probabilité est égale à $\frac{1}{4}$.
$P(S_{n-1} \cap S_n)$: si la guêpe est sortie à l'instant $t = n-1$, elle ne peut sortir à l'instant $t = n$ (sortir à l'instant $t = n$ signifie qu'elle est dans la pièce A ou B à l'instant $t = n-1$, ce qui n'est pas le cas). Par conséquence, l'évènement $S_{n-1} \cap S_n$ est impossible et $P(S_{n-1} \cap S_n) = 0$.

En utilisant la question (2) d. ainsi que l'égalité $s_n = \frac{1}{4} b_{n-1}$, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad s_n = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

correction de l'exercice 5

1. Si l'on effectue 0 opération, autrement si l'on considère l'état initial des boites, l'urne A contient deux jetons numéro 0, donc la somme des jetons de l'urne A est égale à 0. Il est dès lors immédiat que

$$\boxed{p_0 = 1, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = 0}$$

En effectuant une fois l'opération, on est obligé de choisir un jeton 0 de l'urne A et un jeton 1 de l'urne B et de les échanger donc à la fin de l'opération, l'urne A contient nécessairement un jeton numéro 0 et un jeton numéro 1, ce qui implique que la somme des jetons dans l'urne A après une opération est égale à 1. Par conséquent, il est immédiat que

$$\boxed{p_1 = 0, \quad q_1 = 1, \quad r_1 = 0}$$

2. Pour connaitre la somme des jetons contenant dans l'urne A après $(n+1)$ opérations, il est indispensable de connaitre le contenu de chaque urne après n opérations, ou, ce qui revient au même, le contenu de l'urne A ou encore, la somme des jetons de l'urne A à après n opérations. Par conséquent, on introduit naturellement le système complet d'évènements (P_n, Q_n, R_n), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
p(P_{n+1}) &= p(P_n \cap P_{n+1}) + p(Q_n \cap P_{n+1}) + p(R_n \cap P_{n+1}) = 0 + p(Q_n) p_{Q_n}(P_{n+1}) + 0 = \frac{1}{4} p(Q_n) \\
p(Q_{n+1}) &= p(P_n \cap Q_{n+1}) + p(Q_n \cap Q_{n+1}) + p(R_n \cap Q_{n+1}) = p(P_n) p_{P_n}(Q_{n+1}) + p(Q_n) p_{Q_n}(Q_{n+1}) + p(R_n) p_{R_n}(Q_{n+1}) \\
&= p(P_n) + \frac{1}{2} p(Q_n) + p(R_n) \\
p(R_{n+1}) &= p(P_n \cap R_{n+1}) + p(Q_n \cap R_{n+1}) + p(R_n \cap R_{n+1}) = 0 + p(Q_n) p_{Q_n}(R_{n+1}) + 0 = \frac{1}{4} p(Q_n)
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{4} q_n \\ q_{n+1} = p_n + \frac{1}{2} q_n + r_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4} q_n \end{cases}}$$

Justification des calculs de probabilités : le mieux est de faire un dessin
<u>$p(P_n \cap P_{n+1})$</u> :

état des urnes après n opérations		état des urnes après $(n+1)$ opérations	
0 0 urne A	1 1 urne B	0 0 urne A	1 1 urne B
réalisation de P_n		réalisation de P_{n+1}	

L'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ est clairement impossible puisque l'on doit nécessairement échanger un jeton 0 de l'urne A et un jeton 1 de l'urne B donc $p(P_n \cap P_{n+1}) = 0$

$\underline{p_{P_n}(Q_{n+1})}$:

état des urnes après n opérations	état des urnes après $(n+1)$ opérations
$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\end{array}}$	$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}1\\0\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\end{array}}$
réalisation de P_n	réalisation de Q_{n+1}

L'évènement P_n est réalisé donc on certain que l'évènement Q_{n+1} se réalise puisque l'on doit nécessairement échanger un jeton 0 de l'urne A et un jeton 1 de l'urne B donc $p_{P_n}(Q_{n+1}) = 1$

$\underline{p(P_n \cap R_{n+1})}$:

état des urnes après n opérations	état des urnes après $(n+1)$ opérations
$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\end{array}}$	$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\end{array}}$
réalisation de P_n	réalisation de R_{n+1}

L'évènement $P_n \cap R_{n+1}$ est clairement impossible puisque l'on ne peut échanger les deux jetons 0 de l'urne A et les deux jetons 1 de l'urne B donc $p(P_n \cap R_{n+1}) = 0$

$\underline{p_{Q_n}(P_{n+1})}$:

état des urnes après n opérations	état des urnes après $(n+1)$ opérations
$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\end{array}}$	$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\end{array}}$
réalisation de Q_n	réalisation de P_{n+1}

L'évènement Q_n est réalisé donc pour que P_{n+1} se réalise, il faut et il suffit échanger le jeton 1 de l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) avec le jeton 0 de l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) donc $p_{Q_n}(P_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

$\underline{p_{Q_n}(Q_{n+1})}$:

état des urnes après n opérations	état des urnes après $(n+1)$ opérations
$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\end{array}}$	$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\end{array}}$
réalisation de Q_n	réalisation de Q_{n+1}

L'évènement Q_n est réalisé donc pour que Q_{n+1} se réalise, il faut et il suffit échanger le jeton 0 de l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) avec le jeton 1 de l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) ou le jeton 1 de l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) avec le jeton 0 de l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) donc $p_{Q_n}(Q_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\underline{p_{Q_n}(R_{n+1})}$:

état des urnes après n opérations	état des urnes après $(n+1)$ opérations
$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\end{array}}$	$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\end{array}}$
réalisation de Q_n	réalisation de R_{n+1}

L'évènement Q_n est réalisé donc pour que Q_{n+1} se réalise, il faut et il suffit échanger le jeton 0 de l'urne A (probabilité $\frac{1}{2}$) avec le jeton 1 de l'urne B (probabilité $\frac{1}{2}$) donc $p_{Q_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

<u>$p(R_n \cap P_{n+1})$</u> :

état des urnes après n opérations	état des urnes après $(n+1)$ opérations
$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\\\hline\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\\\hline\end{array}}$	$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\\\hline\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\\\hline\end{array}}$
réalisation de R_n	réalisation de P_{n+1}

L'évènement $P_n \cap R_{n+1}$ est clairement impossible puisque puisque l'on ne peut échanger les deux jetons 1 de l'urne A et les deux jetons 0 de l'urne B donc $p(R_n \cap P_{n+1}) = 0$

<u>$p_{R_n}(Q_{n+1})$</u> :

état des urnes après n opérations	état des urnes après $(n+1)$ opérations
$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\\\hline\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\\\hline\end{array}}$	$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\\\hline\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\1\\\hline\end{array}}$
réalisation de R_n	réalisation de Q_{n+1}

L'évènement R_n est réalisé donc l'évènement Q_{n+1} se réalise nécessairement (tous les échanges possibles conviennent) $p_{R_n}(Q_{n+1}) = 1$.

<u>$p(R_n \cap R_{n+1})$</u> :

état des urnes après n opérations	état des urnes après $(n+1)$ opérations
$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\\\hline\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\\\hline\end{array}}$	$\underset{\text{urne } A}{\begin{array}{\|c\|}1\\1\\\hline\end{array}} \quad \underset{\text{urne } B}{\begin{array}{\|c\|}0\\0\\\hline\end{array}}$
réalisation de R_n	réalisation de R_{n+1}

L'évènement $P_n \cap R_{n+1}$ est clairement impossible puisque puisque l'on est obligé d'échanger un jeton 1 de l'urne A avec un jeton 0 de l'urne B donc $p(R_n \cap R_{n+1}) = 0$

3. On procède par un calcul direct en utilisant les égalités obtenues à la question (2)

$$q_{n+2} = p_{n+1} + \frac{1}{2}q_{n+1} + r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{4}q_n = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n \Rightarrow \boxed{q_{n+2} = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{2}q_n}$$

4. La suite q est récurrente linéaire d'ordre 2.
Equation caractéristique : $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$ dont les racines sont $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.
Par conséquent, il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \beta 1^n = \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \beta$$

Détermination des constantes α et β :

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \beta = q_0 \\ \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \beta = q_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha + \beta = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \beta = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{3}{2}\alpha = -1 \\ 3\beta = 2 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -\frac{2}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi, la suite q est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}$$

Ensuite, en utilisant la question (2), on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{4}q_n \\ r_{n+1} = \frac{1}{4}q_n \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \begin{cases} p_n = \frac{1}{4}q_{n-1} \\ r_n = \frac{1}{4}q_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \begin{cases} p_n = \frac{1}{4}\left[-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\right] \\ r_n = \frac{1}{4}\left[-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\right] \end{cases}$$

Nous avons ainsi expliciter les trois suites p, q et r par

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \begin{cases} p_n = \frac{1}{4}\left[-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\right] \\ q_n = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \\ r_n = \frac{1}{4}\left[-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\right] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 0 \\ r_0 = 0 \end{cases}}$$

5. Puisque $-\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, la suite $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge vers 0 donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}, \quad \lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{2}{3}, \quad \lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}}$$

Après un nombre suffisamment grand d'échange, la probabilité que la somme des jetons de l'urne A soit égale à

- 0 vaut environ $\frac{1}{6}$
- 1 vaut environ $\frac{2}{3}$
- 2 vaut environ $\frac{1}{6}$