correction de l'exercice 1
On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

Initialisation : $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ et $\begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & b^0 & 0 \\ 0 & 0 & c^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc $A^0 = \begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & b^0 & 0 \\ 0 & 0 & c^0 \end{pmatrix}$, ce qui implique que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ et montrons que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$. On a, par un calcul direct très simple,

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

correction de l'exercice 2
On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $J^n = 6^{n-1}J$.
Initialisation : $n = 1$, on a $J^1 = J$ et $6^{1-1}J = 6^0 J = J$ donc $J^1 = 6^{1-1}J$ ce qui implique que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
Hérédité : supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $J^n = 12^{n-1}J$ et montrons que $J^{n+1} = 6^{(n+1)-1}J = 6^n J$. On a évidement

$$J^{n+1} = J^n \times J = 6^{n-1}J \times J = 6^{n-1}J^2$$

donc il faut évaluer J^2. Par un calcul direct très simple, on a

$$J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} = 6J$$

donc $J^{n+1} = 6^{n-1}(6J) = 6^n J$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

correction de l'exercice 3

1. Par un calcul direct, on a

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = P \\ Q^2 &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Q \\ PQ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_3 \quad QP = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0_3 \end{aligned}$$

   Finalement, en explicitant l'égalité $A = aP + bQ$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b & \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b \\ -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b & -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b & \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b = -1 \\ -\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = -3 \\ b = 3 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \end{array} \right.$$

   On en déduit l'identité remarquable $\boxed{A = -3P + 3Q}$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$ $\quad A^n = (-3)^n P + 3^n Q$
   Initialisation : $n = 0$, on a $A^0 = I$ et, par un calcul, on obtient $(-3)^0 P + 3^0 Q = P + Q = I$ donc $A^0 = (-3)^0 P + 3^0 Q$

et l'hypothèse $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n = (-3)^n P + 3^n Q$ et montrons que $A^{n+1} = (-3)^{n+1} P + 3^{n+1} Q$. En utilisant la question 1 ainsi que l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$, on a

$$A^{n+1} = A^n \times A = ((-3)^n P + 3^n Q)(-3P + 3Q) = (-3)^n(-3)\underbrace{P^2}_{=P} + (-3)^n 3\underbrace{PQ}_{=0} + 3^n(-3)\underbrace{QP}_{=0} + 3^n \times 3\underbrace{Q^2}_{=Q} = (-3)^{n+1}P + 3^{n+1}Q$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

correction de l'exercice 4

1. On pose $(\mathcal{P}_n)$: il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$.
Initialisation $n = 0$. On recherche un réel a_0 tel que

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_0 & 1-2a_0 & 2a_0 \\ a_0 & -a_0 & a_0+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_0 & 1-2a_0 & 2a_0 \\ a_0 & -a_0 & a_0+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a_0 = 0 \\ 1-2a_0 = 1 \\ a_0 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} -a_0 = 0 \\ a_0 + 1 = 1 \end{array} \Leftrightarrow a_0 = 0$$

Ainsi, en choisissant $a_0 = 0$, on a bien l'égalité $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_0 & 1-2a_0 & 2a_0 \\ a_0 & -a_0 & a_0+1 \end{pmatrix}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Remarquons que, sans calcul, on peut directement voir que le choix de $a_0 = 0$ permet d'avoir l'égalité. Il n'est pas toujours obligé de résoudre des systèmes car, dans certains cas simples, un peu d'imagination permet de deviner aisément et simplement des valeurs convenables pour les paramètres (l'hypothèse de récurrence nécessite uniquement l'existence et non l'uncité de la solution)
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire, supposons qu'il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$ et montrons l'existence d'un réel a_{n+1} tel que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_{n+1} & 1-2a_{n+1} & 2a_{n+1} \\ a_{n+1} & -a_{n+1} & a_{n+1}+1 \end{pmatrix}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$, on a

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4a_n+6 & 4a_n-5 & -4a_n+6 \\ -2a_n+3 & 2a_n-3 & -2a_n+4 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il un réel a_{n+1} tel que $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_{n+1} & 1-2a_{n+1} & 2a_{n+1} \\ a_{n+1} & -a_{n+1} & a_{n+1}+1 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4a_n+6 & 4a_n-5 & -4a_n+6 \\ -2a_n+3 & 2a_n-3 & -2a_n+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_{n+1} & 1-2a_{n+1} & 2a_{n+1} \\ a_{n+1} & -a_{n+1} & a_{n+1}+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -4a_n + 6 = 2a_{n+1} \\ 4a_n - 5 = 1 - 2a_{n+1} \\ -2a_n + 3 = a_{n+1} \\ 2a_n - 3 = -a_{n+1} \\ -2a_n + 4 = a_{n+1} + 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow a_{n+1} = -2a_n + 3$$

Ainsi, le choix du réel $a_{n+1} = -2a_n + 3$ permet d'avoir l'égalité $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_{n+1} & 1-2a_{n+1} & 2a_{n+1} \\ a_{n+1} & -a_{n+1} & a_{n+1}+1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie et la récurrence s'achève.

2. C'est immédiat car, d'après la récurrence de la question 1, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -2a_n + 3$

3. **Explicitation de a_n** : Recherche de la constante L : $L = -2L + 3 \Leftrightarrow 3L = 3 \Leftrightarrow L = 1$
On introduit la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a_n - 1 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1$

$$u_{n+1} = a_{n+1} - 1 = -2a_n + 3 - 1 = -2a_n + 2 = -2(a_n - 1) = -2u_n$$

La suite u est donc géométrique de raison -2, ce qui permet d'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-2)^n u_0 \Leftrightarrow a_n - 1 = (-2)^n (a_0 - 1) \Leftrightarrow a_n = 1 - (-2)^n$$

puisque $a_0 = 0$ d'après l'initialisation de la récurrence de la question 1. Il est dès lors immédiat que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(1-(-2)^n) & 1-2(1-(-2)^n) & 2(1-(-2)^n) \\ 1-(-2)^n & -(1-(-2)^n) & (1-(-2)^n)+1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2(-2)^n + 2 & 2(-2)^n - 1 & -2(-2)^n + 2 \\ -(-2)^n + 1 & (-2)^n - 1 & -(-2)^n + 2 \end{pmatrix}}$$

correction de l'exercice 5

1. On procède par un calcul directOn procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$P\,\mathrm{diag}(4,6,8)=\begin{pmatrix}4&6&8\\4&-6&8\\-4&6&8\end{pmatrix}\Rightarrow P\,\mathrm{diag}(4,6,8)Q=\begin{pmatrix}5&1&2\\-1&7&2\\1&1&6\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{A=P\,\mathrm{diag}(4,6,8)Q}$$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)\quad A^n=PD^nQ$
Initialisation $n=0$: $A^0=I$ et $PD^0Q=PIQ=PQ\underset{\text{calcul direct}}{=}I$ donc $A^0=PD^0Q$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n=PD^nQ$ et montrons que $A^{n+1}=PD^{n+1}Q$.

$$A^{n+1}=A^n\times A=PD^n\underbrace{QP}_{=I\text{ (par calcul direct)}}AQ=PD^nDQ=PD^{n+1}Q$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence

Puisque D est une matrice diagonale, il est immédiat que $D^n=\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&6^n&0\\0&0&8^n\end{pmatrix}$ ce qui nous permet d'écrire

$$PD^n=\begin{pmatrix}4^n&6^n&8^n\\4^n&-6^n&8^n\\-4^n&6^n&8^n\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\boxed{A^n=PD^nQ=\begin{pmatrix}\frac12 4^n+\frac12 6^n&-\frac12 6^n+\frac12 8^n&-\frac12 4^n+\frac12 8^n\\\frac12 4^n-\frac12 6^n&\frac12 6^n+\frac12 8^n&-\frac12 4^n+\frac12 8^n\\-\frac12 4^n+\frac12 6^n&-\frac12 6^n+\frac12 8^n&\frac12 4^n+\frac12 8^n\end{pmatrix}}$$

correction de l'exercice 6

1. Un calcul direct nous donne $PD=\begin{pmatrix}3&0&-24\\0&-4&24\\6&8&0\end{pmatrix}$ et $PDQ=\begin{pmatrix}10&-6&-3\\-4&12&2\\-4&-4&6\end{pmatrix}=A\Rightarrow\boxed{PDQ=A}$

$\underline{A^n=PD^nQ}$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)\quad A^n=PD^nQ$
Initialisation $n=0$: $A^0=I$ et $PD^0Q=PIQ=PQ\underset{\text{calcul direct}}{=}I$ donc $A^0=PD^0Q$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n=PD^nQ$ et montrons que $A^{n+1}=PD^{n+1}Q$.

$$A^{n+1}=A^n\times A=PD^n\underbrace{QP}_{=I\text{ (par calcul direct)}}DQ=PD^nDQ=PD^{n+1}Q$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Par conséquent, en utilisant que $D^n=\begin{pmatrix}4^n&0&0\\0&8^n&0\\0&0&16^n\end{pmatrix}$, on a

$$PD^n=\begin{pmatrix}\frac34 4^n&0&-\frac32 16^n\\0&-\frac12 8^n&\frac32 16^n\\\frac32 4^n&8^n&0\end{pmatrix}\qquad\boxed{A^n=PD^nQ=\begin{pmatrix}\frac12 4^n+\frac12 16^n&\frac12 4^n-\frac12 16^n&\frac14 4^n-\frac14 16^n\\\frac12 8^n-\frac12 16^n&\frac12 8^n+\frac12 16^n&-\frac14 8^n+\frac14 16^n\\4^n-8^n&4^n-8^n&\frac12 4^n+\frac12 8^n\end{pmatrix}}$$

correction de l'exercice 7

1. $PQ=8I\quad QP=8I\quad PT=\begin{pmatrix}0&-8&24\\4&8&0\\-4&0&-12\end{pmatrix}\quad PTQ=\begin{pmatrix}56&64&64\\24&16&48\\-56&-56&-88\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\frac18 PTQ=A}$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)\quad A^n=8^{n-1}PT^nQ$
Initialisation $n=0$: $A^0=I$ et $8^{0-1}PT^0Q=8^{-1}PQ=8^{-1}\times 8I=I$ donc $A^0=8^{0-1}PTQ$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n=8^{n-1}PT^nQ$ et montrons que $A^{n+1}=8^nPT^{n+1}Q$.

$$A^{n+1}=A^n\times A=8^{n-1}PT^n\underbrace{QP}_{=8I}TQ=8^{n-1}\times 8\times PT^nTQ=8^nPT^{n+1}Q$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence
Puisque T est diagonale, il est immédiat que

$$T^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{8}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{8}\right)^n \end{pmatrix} \Rightarrow PT^n = \begin{pmatrix} 0 & 8\left(-\frac{1}{8}\right)^n & 8\left(\frac{3}{8}\right)^n \\ -\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -8\left(-\frac{1}{8}\right)^n & 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & -4\left(\frac{3}{8}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$PT^nQ = \begin{pmatrix} -8\left(-\frac{1}{8}\right)^n + 16\left(\frac{3}{8}\right)^n & -16\left(-\frac{1}{8}\right)^n + 16\left(\frac{3}{8}\right)^n & -16\left(-\frac{1}{8}\right)^n + 16\left(\frac{3}{8}\right)^n \\ -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8\left(-\frac{1}{8}\right)^n & -8\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 16\left(-\frac{1}{8}\right)^n & -16\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 16\left(-\frac{1}{8}\right)^n \\ 8\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 8\left(\frac{3}{8}\right)^n & 8\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 8\left(\frac{3}{8}\right)^n & 16\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 8\left(\frac{3}{8}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = 8^{n-1}PT^nQ = \frac{1}{8}\times 8^nPT^nQ = \boxed{\begin{pmatrix} -(-1)^n + 2\times 3^n & -2(-1)^n + 2\times 3^n & -2(-1)^n + 2\times 3^n \\ -(-4)^n + (-1)^n & -(-4)^n + 2(-1)^n & -2(-4)^n + 2(-1)^n \\ (-4)^n - 3^n & (-4)^n - 3^n & 2(-4)^n - 3^n \end{pmatrix} = A^n}$$

correction de l'exercice 8

1. Un calcul direct montre que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

   Détermination de a et b : Si l'on explicite l'égalité $A^2 = aA + bI_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -3a & 6a \\ 6a & -8a+b & 12a \\ 3a & -3a & 4a+b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -3a=3 \\ 6a=-6 \\ -8a+b=10 \\ 12a=-12 \\ 3a=-3 \\ 4a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{A^2 = -A + 2I_3}$$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: il existe un réel a_n tel que $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I_3$

   Initialisation $n = 0$: $A^0 = I_3$ et recherchons un réel a_0 vérifiant $\left(\frac{1}{3} - a_0\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_0\right)I_3 = I_3$. On vérifie directement que $a_0 = \frac{1}{3}$ convient bien puisque

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)A + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)I_3 = 0\times A + 1\times I_3 = I_3$$

   Il existe donc bien un réel $a_0 = \frac{1}{3}$ tel que $A^0 = \left(\frac{1}{3} - a_0\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_0\right)I_3$

   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+!})$, c'est-à-dire supposons qu'il existe un réel a_n tel que $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I_3$ et montrons qu'il existe un réel a_{n+1} tel que $A^{n+1} = \left(\frac{1}{3} - a_{n+1}\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_{n+1}\right)I_3$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n\times A = \left[\left(\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I_3\right]A = \left(\frac{1}{3} - a_n\right)A^2 + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)A \\ &= \left(\frac{1}{3} - a_n\right)(-A + 2I_3) + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)A = \left(2a_n + \frac{1}{3}\right)A + \left(\frac{2}{3} - 2a_n\right)I_3 \overset{?}{=} \left(\frac{1}{3} - a_{n+1}\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_{n+1}\right)I_3 \end{aligned}$$

   Pour que $(\mathcal{P}_{n+1})$ soit vraie, il suffit de demander que

$$\begin{cases} 2a_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - a_{n+1} \\ \frac{2}{3} - 2a_n = \frac{2}{3} + a_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_n = -a_{n+1} \\ -2a_n = a_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow a_{n+1} = -2a_n$$

Par conséquent, en choisissant le réel $a_{n+1} = -2a_n$, on a bien $A^{n+1} = \left(\dfrac{1}{3} - a_{n+1}\right) A + \left(\dfrac{2}{3} + a_{n+1}\right) I_3$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

3. D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -2a_n$ donc la suite a est géométrique de raison -2.

4. En tenant compte que $a_0 = \dfrac{1}{3}$ (d'après l'initialisation de la récurrence de la question 1), on a

$$a_n = (-2)^n a_0 = \frac{(-2)^n}{3} \Rightarrow \boxed{A^n = \left(\frac{1}{3} - \frac{(-2)^n}{3}\right) A + \left(\frac{2}{3} + \frac{(-2)^n}{3}\right) I_3 = \begin{pmatrix} 1 & (-2)^n - 1 & 2 - 2(-2)^n \\ 2 - 2(-2)^n & 3(-2)^n - 2 & 4 - 4(-2)^n \\ 1 - (-2)^n & (-2)^n - 1 & 2 - (-2)^n \end{pmatrix}}$$

correction de l'exercice 9

1. Un calcul direct montre que $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Détermination de a et b : En explicitan l'égalité $A^2 = aA + bI$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha + \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2\alpha + \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & 2\alpha + \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 7 \\ \alpha = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 6 \\ \beta = -5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \boxed{A^2 = 6A - 5I}$$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$
Initialisation $n = 0$: $A^0 = I$ et recherchons deux réels a_0 et b_0 tel que $a_0 A + b_0 I = I$. On vérifie que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ convient bien puisque $0 \times A + 1 \times I = I = A^0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+!})$, c'est-à-dire supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$ et montrons qu'il existe deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I$

$$A^{n+1} = A^n \times A = (a_n A + b_n I) A = a_n A^2 + b_n A = a_n (6A - 5I) + b_n A = (6a_n + b_n) A - 5a_n I$$

En choisissant les réels $a_{n+1} = 6a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -5a_n$, on a bien $A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} I$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

3. La question précédente montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = 6a_n + b_n \\ b_{n+1} = -5a_n \end{array} \right.$. D'autre part, la question précédente montre que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ donc $a_1 = 6a_0 + b_0 = 1$ et $b_1 = -5a_0 = 0$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = 6a_n + b_n \\ b_{n+1} = -5a_n \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_0 = 0, & b_0 = 1 \\ a_1 = 1, & b_1 = 0 \end{array} \right.}$$

4. Un calcul direct nous donne $a_{n+2} = 6a_{n+1} + b_{n+1} = 6a_{n+1} - 5a_n$ donc la suite a est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Equation caractéristique : $x^2 = 6x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ dont les racines sont 1 et 5.
Il existe donc deux réels c et d tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = c \times 1^n + d \times 5^n = c + d \times 5^n$
Détermination de c et d :

$$\left\{ \begin{array}{l} c + d \times 5^0 = a_0 \\ c + d \times 5^1 = a_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c + d = 0 \\ c + 5d = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4c = -1 \\ 4d = 1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = -\dfrac{1}{4} \\ d = \dfrac{1}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{4}(-1 + 5^n)}$$

5. En utilisant l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, on obtient

$$b_n = a_{n+1} - 6a_n = \frac{1}{4}\left(-1 + 5^{n+1}\right) - \frac{6}{4}(-1 + 5^n) = \boxed{\frac{1}{4}(5 - 5^n) = b_n}$$

ce qui nous donne, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{A^n = \frac{1}{4}(-1 + 5^n) A + \frac{1}{4}(5 - 5^n) I = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}5^n + \frac{3}{4} & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}5^n + \frac{3}{4} & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}5^n + \frac{3}{4} & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}5^n - \frac{1}{4} & \frac{1}{4}5^n + \frac{3}{4} \end{pmatrix}}$$

correction de l'exercice 10

1. Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 17 \end{pmatrix} \\ 6A - A^2 &= 6\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^3 = 6A - A^2} \end{aligned}$$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$
Initialisation $n = 1$: $A^1 = A$ et recherchons deux réels a_0 et b_0 tel que $a_0 A^2 + b_0 A = A$. On vérifie que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ convient bien puisque $0 \times A^2 + 1 \times A = A = A^1$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+!})$, c'est-à-dire supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A^2 + b_n A$ et montrons qu'il existe deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A$
$$A^{n+1} = A^n \times A = \left(a_n A^2 + b_n A\right) A = a_n A^3 + b_n A^2 = a_n(6A - A^2) + b_n A^2 = (-a_n + b_n)A^2 + 6a_n A$$
En choisissant les réels $a_{n+1} = -a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -6a_n$, on a bien $A^{n+1} = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.
D'après la récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = -a_n + b_n \\ b_{n+1} = 6a_n \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \end{array}\right.$ donc
$$\left\{\begin{array}{l} a_2 = -a_1 + b_1 = 1 \\ b_2 = 6a_1 = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} a_3 = -a_2 + b_2 = -1 \\ b_3 = 6a_2 = 6 \end{array}\right.$$

3. D'après la relation de récurrence précédente, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -a_{n+1} + b_{n+1} = -a_{n+1} + 6a_n$$
donc la suite a est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
Equation caractéristique : $x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$ dont les racines sont -3 et 2 donc il existe deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha(-3)^n + \beta \times 2^n$.
Détermination de α et β :
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(-3)^1 + \beta \times 2^1 = a_1 \\ \alpha(-3)^2 + d \times 2^2 = a_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -3\alpha + 2\beta = 0 \\ 9\alpha + 4\beta = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -15\alpha = -1 \\ 10\beta = 1 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1}{15} \\ \beta = \dfrac{1}{10} \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{15}(-3)^n + \frac{1}{10} \times 2^n}$$

4. La relation de récurrence obtenue à la question 1 nous donne $\forall n \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} + a_n = \left(\frac{1}{15}(-3)^{n+1} + \frac{1}{10} \times 2^{n+1}\right) + \left(\frac{1}{15}(-3)^n + \frac{1}{10} \times 2^n\right) \\ &= \left(-\frac{3}{15}(-3)^n + \frac{2}{10} \times 2^n\right) + \left(\frac{1}{15}(-3)^n + \frac{1}{10} \times 2^n\right) = -\frac{2}{15}(-3)^n + \frac{3}{10} \times 2^n \end{aligned}$$
ce qui permet d'écrire pour tout entier naturel n
$$\boxed{A^n = \left(\frac{1}{15}(-3)^n + \frac{1}{10} \times 2^n\right) A^2 + \left(-\frac{2}{15}(-3)^n + \frac{3}{10} \times 2^n\right) A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-3)^n & -\frac{1}{3}(-3)^n & -\frac{1}{3}(-3)^n \\ 2^n - \frac{4}{3}(-3)^n & \frac{2}{3}(-3)^n & -2^n + \frac{2}{3}(-3)^n \\ -2^n + \frac{2}{3}(-3)^n & -\frac{1}{3}(-3)^n & 2^n - \frac{1}{3}(-3)^n \end{pmatrix}}$$

correction de l'exercice 11

1. On explicite pour commencer B avant de calculer B^2
$$B = A - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Pour l'autre égalité, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $A^n = 2^n I + n2^{n-1}B$
Initialisation : $n=0$, on a $A^0 = I$ et, par un calcul, on obtient $2^0 I + 0\times 2^{0-1}B = I + 0_3 = I$ donc $A^0 = 2^0 I + 0\times 2^{0-1}B$ et l'hypothèse $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n = 2^n I + n2^{n-1}B$ et montrons que $A^{n+1} = 2^{n+1}I + (n+1)2^n B$.
En utilisant la question 1 ainsi que l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$, on a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = (2^n I + n2^{n-1}B)(B+2I) = 2^n BI + 2^{n+1}\underbrace{I^2}_{=I} + n2^{n-1}\underbrace{B^2}_{=0_3} + n2^n BI = 2^{n+1}I + (2^n + n2^n)B \\ &= 2^{n+1}I + 2^n\underbrace{(1+n)}_{=n+1}B \end{aligned}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

2. Les matrices B et $2I$ commutent car $B(2I) = 2B = (2I)B$ donc la formule du binôme s'applique

$$A^n = (B+2I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k}$$

Puisque $B^k = 0_3$ lorsque $k \geqslant 2$, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 (2I)^{n-0} + \binom{n}{1} B^1 (2I)^{n-1} = 2^n I + n2^{n-1}B \\ &\Rightarrow \boxed{A^n = \begin{pmatrix} (1+3n)2^n & n2^{n+1} & 0 \\ -n2^{n+1} & (1-n)2^n & 0 \\ 0 & 0 & (1+n)2^n \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 12

1. **Détermination de** a :

$$A = aI + B \Leftrightarrow aI = A - B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

Un calcul direct nous donne

$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 12 \\ 6 & -18 & 12 \\ 6 & -18 & 12 \end{pmatrix} \quad B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

2. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $A^n = 6^n I + n6^{n-1}B + \dfrac{n(n-1)6^{n-2}}{2}B^2$.

Initialisation : $n=0$, on a $A^0 = I$ et, par un calcul, on obtient $6^0 I + 0\times 6^{0-1}B + \dfrac{0(0-1)6^{0-2}}{2}B^2 = I$ donc $A^0 = 6^0 I + 0\times 6^{0-1}B + \dfrac{0(0-1)6^{0-2}}{2}B^2$ et l'hypothèse $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n = 6^n I + n6^{n-1}B + \dfrac{n(n-1)6^{n-2}}{2}B^2$ et montrons que $A^{n+1} = 6^{n+1}I + (n+1)6^n B + \dfrac{(n+1)n6^{n-1}}{2}B^2$.
En utilisant la question 1 ainsi que l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$, on a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = (6^n I + n6^{n-1}B + \frac{n(n-1)6^{n-2}}{2}B^2)(6I+B) \\ &= 6^{n+1}\underbrace{I^2}_{=I} + n6^n BI + \frac{n(n-1)6^{n-1}}{2}B^2 I + 6^n IB + n6^{n-1}B^2 + \frac{n(n-1)6^{n-2}}{2}\underbrace{B^3}_{=0_3} \\ &= 6^{n+1}I + n6^n B + \frac{n(n-1)6^{n-1}}{2}B^2 + 6^n B + n6^{n-1}B^2 = 6^{n+1}I + (n6^n + 6^n)B + \left(\frac{n(n-1)6^{n-1}}{2} + n6^{n-1}\right)B^2 \\ &= 6^{n+1}I + 6^n(n+1)B + n6^{n-1}\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)B^2 = 6^{n+1}I + 6^n(n+1)B + n6^{n-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)B^2 \end{aligned}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

3. Les matrices B et $6I$ commutent car $(6I)B = 6B$ et $B(6I) = B$ donc $(6I)B = B(6I)$. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton

$$A^n = (6I+B)^n = (B+6I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (6I)^{n-k}$$

Puisque $B^k = 0_3$ lorsque $k \geqslant 3$, on a, pour tout entier naturel n :

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k (6I)^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 (6I)^{n-0} + \binom{n}{1} B^1 (6I)^{n-1} + \binom{n}{2} B^2 (6I)^{n-2} = 6^n I + n6^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 6^{n-2} B^2$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{3}{4}n + \frac{1}{12}n^2 + 1\right) 6^n & -\frac{1}{4} n\,(n-5)\,6^n & \frac{1}{6} n\,(n-3)\,6^n \\ \frac{1}{12} n\,(n-5)\,6^n & \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}n^2 + 1\right) 6^n & \frac{1}{6} n\,(n+1)\,6^n \\ \frac{1}{12} n\,(n-3)\,6^n & -\frac{1}{4} n\,(n+1)\,6^n & \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{6}n^2 + 1\right) 6^n \end{pmatrix}}$$

correction de l'exercice 13

1. On utilise les opérations élémentaires pour expliciter B et C

$$\left\{\begin{array}{l} B + C = I \\ B + (1-p-q)C = A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (-p-q)B = (1-p-q)I - A \\ (-p-q)C = A - I \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} L_1 \leftarrow (1-p-q)L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B = \dfrac{A-(1-p-q)I}{p+q} \\ C = \dfrac{I-A}{p+q} \end{array}\right. \qquad \boxed{\text{donc } B = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{q}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{p}{p+q} & -\frac{q}{p+q} \\ -\frac{p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}}$$

2. On procède par calcul direct

$$\begin{aligned} BC &= \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix} = 0_2 \quad \text{et} \quad CB = \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} = 0_2 \\ B^2 &= \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} pq+q^2 & pq+q^2 \\ pq+p^2 & pq+p^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q(p+q) & q(p+q) \\ p(q+p) & p(q+p) \end{pmatrix} = \frac{p+q}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} = B \\ C^2 &= \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} pq+p^2 & -pq-q^2 \\ -pq-p^2 & pq+q^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} p(q+p) & -q(q+p) \\ -p(q+p) & q(p+q) \end{pmatrix} \\ &= \frac{p+q}{(p+q)^2} \begin{pmatrix} p & -q \\ -p & q \end{pmatrix} = C \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{B^2 = B, \quad C^2 = C, \quad BC = CB = 0_2}$

3. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : A^n = B + (1-p-q)^n C$.
Initialisation : $n = 0$, on a $A^0 = I$ et, par un calcul, on obtient $B+(1-p-q)^0 C = B+C = I$ donc $A^0 = B+(1-p-q)^0 C$ et l'hypothèse $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n = B + (1-p-q)^n C$ et montrons que $A^{n+1} = B + (1-p-q)^{n+1} C$.
En utilisant la question 1 ainsi que l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_n)$, on a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = (B + (1-p-q)^n C)(B + (1-p-q)C) \\ &= \underbrace{B^2}_{=B} + (1-p-q)^n \underbrace{CB}_{=0_3} + (1-p-q)^n \underbrace{BC}_{=0_3} + (1-p-q)^{n+1} \underbrace{C^2}_{=C} = B + (1-p-q)^{n+1} C \end{aligned}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

4. Par construction, on a $A = B + (1-p-c)C$ et les matrices B et $(1-p-c)C$ commutent puisque

$$B(1-p-q)C = (1-p-q)BC = 0_2 \quad \text{et} \quad (1-p-q)CB = 0_2 \quad \text{donc} \quad B(1-p-q)C = (1-p-q)CB$$

La formule du binôme est applicable, ce qui nous donne

$$A^n = (B + (1-p-q)C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (1-p-q)^{n-k} C^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p-q)^{n-k} B^k C^{n-k}$$

Puisque $BC = 0$, on en déduit que $B^r C^s = B \cdots \underbrace{BC}_{=0_2} \cdots C = 0_2$ si r et s sont des entiers naturels non nuls. Par conséquent, $B^k C^{n-k} = 0_2$ lorsque $k \geqslant 1$ et $n-k \geqslant 1 \Leftrightarrow k \leqslant n-1$, c'est-à-dire lorsque $k \in [\![1, n-1]\!]$. En particulier, lorsque $n \geqslant 2$ (pour que $n-1 \geqslant 1 \Leftrightarrow n \geqslant 2$), on a

$$\forall n \geqslant 2, \quad A^n = \binom{n}{0}(1-p-q)^{n-0} B^0 C^{n-0} + \binom{n}{n}(1-p-q)^{n-n} B^n C^{n-n} = (1-p-q)^n C^n + B^n$$

En outre, puisque $B^2 = B$, une récurrence immédiate montre que pour tout entier $n \geqslant 1$, $B^n = B$ (pour l'hérédité, $B^{n+1} = B^n B = BB = B^2 = B$). De même, pour tout entier $n \geqslant 1$, $C^n = C$, ce qui nous donne pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\boxed{A^n = (1-p-q)^n C + B = \begin{pmatrix} \dfrac{q + p(1-q-p)^n}{p+q} & \dfrac{q - q(1-p-q)^n}{p+q} \\ \dfrac{p - p(1-p-q)^n}{p+q} & \dfrac{p + q(1-p-q)^n}{p+q} \end{pmatrix}}$$

Je laisse le lecteur vérifier que cette formule est encore valable pour $n = 0$ et 1.

correction de l'exercice 14

1. Un calcul direct nous donne

$$PD = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad PDQ = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2} PDQ}$$

$\underline{A^n = \frac{1}{2} PD^n Q}$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) \quad A^n = PD^nQ$

Initialisation $n = 0$: $A^0 = I$ et $\frac{1}{2}PD^0Q = \frac{1}{2}PIQ = \frac{1}{2}PQ \underset{\text{calcul direct}}{=} \frac{1}{2}(2I) = I$ donc $A^0 = \frac{1}{2}PD^0Q$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n = \frac{1}{2}PD^nQ$ et montrons que $A^{n+1} = \frac{1}{2}PD^{n+1}Q$.

$$A^{n+1} = A^n \times A = (\frac{1}{2}PD^nQ)(\frac{1}{2}PDQ) = \frac{1}{4}PD^n \underbrace{QP}_{=2I} AQ = \frac{1}{2}PD^nDQ = \frac{1}{2}PD^{n+1}Q$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence

Puisque D est diagonale, il est immédiat que $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$PD^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3^n & 0 \\ (-1)^n & 0 & 1 \\ 0 & 3^n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}PD^nQ = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}3^n & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n \\ \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}} = A^n$$

2. (a) L'égalité $X_{n+1} = AX_n$ découle directement du lien entre les matrices et les systèmes linéaires.
Pour la relation suivante, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: $X_n = A^nX_0$
Initialisation $n = 0$: $A^0X_0 = IX_0 = X_0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $X_n = A^nX_0$ et montrons que $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$.

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^nX_0 = A^{n+1}X_0$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

(b) En explicitant l'égalité $X_n = A^n X_0$ et en utilisant que deux matrices sont égales si et seulement tous ces coefficients sont égaux, on obtient les égalités:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2}3^n & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}3^n \\ \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = 2(-1)^n \\ b_n = 2(-1)^n - 2 \\ c_n = -2 \end{cases}}$$

correction de l'exercice 15

1. Il est immédiat qu'il s'agit de $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ -1 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

   Pour la relation suivante, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : X_n = A^n X_0$
   Initialisation $n = 0$: $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $X_n = A^n X_0$ et montrons que $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
   $$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$$
   donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

2. On procède par un calcul direct
   $$\begin{aligned} PDQ &= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & 12 & 48 \\ 8 & 6 & -48 \\ 8 & 3 & 48 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 120 & -120 & 48 \\ -24 & 168 & -96 \\ 48 & -120 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ -1 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A = PDQ} \end{aligned}$$

3. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : A^n = PD^nQ$.
   Initialisation $n = 0$: $A^0 = I$ et $PD^0Q = PIQ = PQ \underset{\text{calcul direct}}{=} I$ donc $A^0 = PD^0Q$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $A^n = PD^nQ$ et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}Q$
   $$A^{n+1} = A^n A = PD^n \underbrace{QP}_{=I \text{ (calcul direct)}} DQ = PD^n DQ = PD^{n+1}Q$$
   donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

4. La matrice D étant diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$, ce qui nous donne
   $$PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n & 12^n \\ 2^n & \frac{1}{2}3^n & -12^n \\ 2^n & \frac{1}{4}3^n & 12^n \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^n = PD^nQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}2^n + \frac{4}{3}3^n + \frac{1}{6}12^n & \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}12^n & 2^n - \frac{4}{3}3^n + \frac{1}{3}12^n \\ -\frac{1}{2}2^n + \frac{2}{3}3^n - \frac{1}{6}12^n & \frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}12^n & 2^n - \frac{2}{3}3^n - \frac{1}{3}12^n \\ -\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{3}3^n + \frac{1}{6}12^n & \frac{1}{2}2^n - \frac{1}{2}12^n & 2^n - \frac{1}{3}3^n + \frac{1}{3}12^n \end{pmatrix}}$$
   Ensuite, en explicitant l'égalité $X_n = A^n X_0$ et en utilisant que deux matrices sont égales si et seulement tous ces coefficients sont égaux, on obtient :
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = 2^n\left(-\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0\right) + 3^n\left(\frac{4}{3}a_0 - \frac{4}{3}c_0\right) + 12^n\left(\frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{3}c_0\right) \\ b_n = 2^n\left(-\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0\right) + 3^n\left(\frac{2}{3}a_0 - \frac{2}{3}c_0\right) + 12^n\left(-\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{2}b_0 - \frac{1}{3}c_0\right) \\ c_n = 2^n\left(-\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0\right) + 3^n\left(\frac{1}{3}a_0 - \frac{1}{3}c_0\right) + 12^n\left(\frac{1}{6}a_0 - \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{3}c_0\right) \end{cases}}$$