correction de l'exercice 1

a) $A^2 = 9I$ par calcul direct, ce qui implique que $A\left(\frac{1}{9}A\right) = I$ donc A est inversible et son inverse est $\frac{1}{9}A$, i.e.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{9}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}}$$

b) Un calcul direct nous donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -6 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 + A - 2I = 0$$

On en déduit que

$$A(A+I) = 2I \Leftrightarrow A\left(\frac{A+I}{2}\right) = I,$$

ce qui montre que A est inversible et que son inverse est $\frac{1}{2}(A+I)$, i.e.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}}$$

c) Un calcul direct nous donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 - A^2 - 2A + 4I = 0$$

On en déduit que

$$A^3 - A^2 - 2A = -4I \Leftrightarrow A\left(\frac{A^2 - A - 2I}{-4}\right) = I$$

ce qui montre que A est inversible et que son inverse est $\frac{1}{2}(A+I)$, i.e.

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^2 - A - 2I) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

d) Un calcul direct nous donne $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2A$. Le terme en I n'étant pas présent, supposons que la matrice A soit inversible, donc A^{-1} existe. L'égalité précédente implique que

$$A^2 = 2A \Leftrightarrow A^2A^{-1} = 2AA^{-1} \Leftrightarrow A = 2I$$

or il est évident que $A \neq 2I$ donc

$$\boxed{\text{la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas inversible.}}$$

e) Un calcul direct nous donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - 2A - 3I = 0$$

On en déduit que

$$A^2 - 2A = 3I \Leftrightarrow A\left(\frac{A-2I}{3}\right) = I$$

ce qui montre que A est inversible et que son inverse est $\frac{1}{3}(A-2I)$, i.e.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}(A-2I) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

f) Un calcul direct nous donne $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & \cdots & 10 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 10 & \cdots & 10 \end{pmatrix} = 10A$. Le terme en I n'étant pas présent, supposons que la matrice A soit inversible, donc A^{-1} existe. L'égalité précédente implique que

$$A^2 = 10A \Leftrightarrow A^2A^{-1} = 10AA^{-1} \Leftrightarrow A = 10I$$

or il est évident que $A \neq 10I$ donc

$$\boxed{\text{la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{10}(\mathbb{R}) \text{ n'est pas inversible.}}$$

correction de l'exercice 2

1. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que

$$\boxed{\begin{array}{l} J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^3 = J^2 \times J) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^4 = J^3 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{donc pour } k \geqslant 4, \quad J^k = J^4 \times J^{4-k} = 0_4 \times J^{k-4} = 0_4 \end{array}}$$

2. On calcule directement :

$$(I+J)(I-J+J^2-J^3) = I^2 - IJ + IJ^2 - IJ^3 + JI - J^2 + J^3 - J^4 = I - J + J^2 - J^3 + J - J^2 + J^3 - J^4 = I - J^4 = I$$

3. La question précédente montre que

$$\boxed{\text{la matrice } (I+J) \text{ est inversible et que son inverse est } I - J + J^2 - J^3}$$

ou, sous une forme plus explicite

$$\boxed{(I+J)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

correction de l'exercice 3

1. On se lance directement dans le calcul :

$$N(a)N(b) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b+1 & -b & -b \\ b & -b+1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a+b & -a-b & -a-b \\ a+b & -b-a+1 & -a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N(a+b)$$

$$\boxed{\text{Pour tous réels } a \text{ et } b, \text{ on a } N(a)N(b) = N(a+b)}$$

2. Il est immédiat que

$$N(c)=I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c+1 & -c & -c \\ c & -c+1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c+1=1 \\ -c=0 \\ c=0 \\ -c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow c=0$$

3. On recherche l'inverse éventuel de $N(a)$ sous la forme $N(b)$ (c'est l'astuce pour les matrices à paramètre).

$$N(a)N(b)=I_3 \Leftrightarrow N(a+b)=N(0) \Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow b=-a$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } N(a) \text{ est inversible et son inverse est } N(-a)\text{, ce que l'on peut encore écrire } [N(a)]^{-1}=N(-a)}$$

correction de l'exercice 4

1. On développe simplement la formule en utilisant que $A^k=0$ si $k \geqslant 3$ (car $A^k=A^{k-3}A^3$ si $k-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow k \geqslant 3$) et que $IB=BI=B$ lorsque B est une matrice quelconque.

$$\begin{aligned} E(t)\,E(t') &= (I+tA+\frac{t^2}{2}A^2)(I+t'A+\frac{t'^2}{2}A^2) \\ &= I^2+(t+t')\,A+\left(tt'+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}(t')^2\right)A^2+\left(\frac{1}{2}t^2t'+\frac{1}{2}t(t')^2\right)A^3+\frac{1}{4}A^4t^2(t')^2 \\ &= I+t'A+\frac{t'^2}{2}A^2+tA+tt'A^2+\frac{t^2}{2}A^2 = I+(t+t')A+\frac{t^2+2tt'+t'^2}{2}A^2 \\ &= I+(t+t')A+\frac{(t+t')^2}{2}A^2=E(t+t'). \end{aligned}$$

2. $E(t)E(-t)=E(t+(-t))=E(0)=I$ donc $E(t)$ est inversible et $E(-t)$ est son inverse, i.e.

$$\boxed{(E(t))^{-1}=E(-t)=I-tA+\frac{t^2}{2}A^2}$$

3. $n=2$, $E(2t)=E(t+t)=E(t)Et(t)=E(t)^2$
$n=3$, $E(3t)=E(2t+t)=E(2t)E(t)=(E(t))^2E(t)=E(t)^3$.
$n=4$, $E(4t)=E(3t+t)=E(3t)E(t)=(E(t))^3E(t)=E(t)^4$.
$n=5$, $E(5t)=E(4t+t)=E(4t)E(t)=(E(t))^4E(t)=E(t)^4$.
Montrons par récurrence que pour tout réel t et tout entier n, la proposition $(\mathcal{P}_n)$: $E(nt)=E(t)^n$ est vraie
Intialisation : $n=0$, $\quad E(t)^0=I=E(0)$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

$$E((n+1)t)=E(nt+t)=E(nt)E(t) \underset{(\mathcal{P}_n)}{=} E(t)^nE(t)=(E(t))^{n+1}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui démontre que

$$\forall n \geqslant 0, \quad (E(t))^n=E(nt)=I+ntA+\frac{(nt)^2}{2}A^2.$$

correction de l'exercice 5

Le pivot est notre seul et unique ami pour la résolution des systèmes

1. $$\begin{cases} 2x+y+z=-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2x+y+z=-5} \\ 12y-8z=4 \\ -3y+z=7 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3-L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=-5 \\ \boxed{12y-8z=4} \\ -4z=32 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 4L_3+L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} z=-8 \\ y=\dfrac{8z+4}{12}=-5 \\ x=\dfrac{-5-y-z}{2}=4 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{le système admet une unique solution qui est } (4,-5,-8)}$$

2. $\left\{\begin{array}{c} 3x+2y+2z=1 \\ 4x-y+3z=-1 \\ 2x+5y+z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{3x+2y+2z=1} \\ -11y+z=-7 \\ 11y-z=1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow 3L_2-4L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3-2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3x+2y+2z=1 \\ \boxed{-11y+z=-7} \\ 0=-6 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{array}\right.$

La dernière égalité étant visiblement impossible, le système n'admet aucune solution.

3. $\left\{\begin{array}{c} 2x+y=2 \\ x+2y=1 \\ x+y=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \boxed{2x+y=2} \\ 3y=0 \\ -y=0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow 2L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3-L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+y=2 \\ 3y=0 \\ 0=0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 3L_3+L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=\dfrac{2-y}{2}=1 \end{array}\right.$

le système admet une unique solution qui est $(1,0)$

4. $\left\{\begin{array}{c} x+3y-z+t=1 \\ 2x+13-7z+2t=2 \\ x-y+z+t=0 \\ x+7y-4z+t=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{x+3y-z+t=1} \\ 7y-5z=0 \\ -4y+2z=-1 \\ 4y-3z=-2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{pivot pour } x \\ L_2 \longleftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3y-z+t=1 \\ \boxed{7y-5z=0} \\ -6z=-7 \\ -z=-14 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 7L_3+4L_2 \\ L_4 \leftarrow 7L_4-4L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3y-z+t=1 \\ 7y-5z=0 \\ \boxed{-6z=-7} \\ 0=-77 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{pivot pour } z \\ L_4 \leftarrow 6L_4-L_3 \end{array}\right.$

La dernière égalité étant visiblement impossible, le système n'admet aucune solution.

5. $\left\{\begin{array}{c} y+z+t=-1 \\ x+z+t=0 \\ x+y+t=1 \\ x+y+z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+z+t=0 \\ y+z+t=-1 \\ x+y+t=1 \\ x+y+z=2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{x+z+t=0} \\ y+z+t=-1 \\ y-z=1 \\ y-t=2 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{pivot pour } x \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+z+t=0 \\ \boxed{y+z+t=-1} \\ -2z-t=2 \\ -z-2t=3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+z+t=0 \\ y+z+t=-1 \\ -2z-t=2 \\ -3t=4 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{pivot pour } z \\ L_4 \leftarrow 2L_4-L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=-\dfrac{4}{3} \\ z=\dfrac{t+2}{-2}=-\dfrac{1}{3} \\ y=-z-t-1=\dfrac{2}{3} \\ x=-z-t=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

le système admet une unique solution qui est $(\frac{5}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$

6. $\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z+t=-5 \\ 2x+3y-3z+t=-1 \\ x-y+z-t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{2x+y+z+t=-5} \\ 2y-4z=4 \\ -3y+z-3t=7 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3-L_1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x+y+z+t=-5 \\ \boxed{2y-4z=4} \\ -10z-6t=26 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 2L_3+3L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{26+6t}{-10}=-\dfrac{13}{5}-\dfrac{3}{5}t \\ y=\dfrac{4+4z}{2}=-\dfrac{16}{5}-\dfrac{6}{5}t \\ x=\dfrac{-5-y-z-t}{2}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}t \end{array}\right.$

le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}t,-\frac{16}{5}-\frac{6}{5}t,-\frac{13}{5}-\frac{3}{5}t,t) \quad t\in\mathbb{R}$

7. $\left\{\begin{array}{l} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=12 \\ u+3v=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{u+w=1} \\ v+w=0 \\ v-w=11 \\ 3v-w=-1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } u \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} u+w=1 \\ \boxed{v+w=0} \\ -2w=11 \\ -4w=-1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } v \\ L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-3L_2 \end{array}$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} u+w=1 & \\ v+w=0 & \\ \boxed{-2w=11} & \textit{Pivot pour } w \\ 0=-23 & L_4 \leftarrow L_4-2L_2 \end{array} \right.$$

La dernière égalité étant visiblement impossible, le système n'admet aucune solution.

8. $$\left\{ \begin{array}{c} x+y-t=1 \\ -x+y+z=0 \\ -y+z+t=0 \\ x-z+t=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \boxed{x+y-t=1} \\ -x+y+z=0 \\ -y+z+t=0 \\ x-z+t=1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y-t=1 \\ 2y+z-t=1 \\ -y+z+t=0 \\ -y-z+2t=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y-t=1 \\ \boxed{2y+z-t=1} \\ 3z+t=1 \\ -z+3t=1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \textit{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 2L_3+L_2 \\ L_4 \leftarrow 2L_4+L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y-t=1 \\ 2y+z-t=1 \\ \boxed{3z+t=1} \\ 10t=4 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \textit{Pivot pour } z \\ L_4 \leftarrow 3L_4+L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5} \\ z=\dfrac{1-t}{3}=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{1-z+t}{2}=\dfrac{3}{5} \\ x=1-y+t=\dfrac{4}{5} \end{array} \right.$$

le système admet une unique solution qui est $(\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5})$

9. $$\left\{ \begin{array}{c} x+y+z-3t=1 \\ -3x+y+z+t=-1 \\ x-3y+z+t=-1 \\ x+y-3z+t=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} \boxed{x+y+z-3t=1} \\ 4y-8z+4t=2 \\ -4y+4t=-2 \\ -4z+4t=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2+3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x+y+z-3t=1 \\ \boxed{4y-8z+4t=2} \\ -8z+8t=0 \\ -4z+4t=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \textit{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow L_3+L_2 \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x+y+z-3t=1 \\ 4y-8z+4t=2 \\ \boxed{-8z+8t=0} \\ 0=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \textit{Pivot pour } z \\ L_4 \leftarrow 2L_4-L_3 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=t \\ y=\dfrac{2+8z-4t}{4}=\dfrac{1}{2}+t \\ x=1-y-z+3t=\dfrac{1}{2}+t \end{array} \right.$$

le système admet une infinité de solutions de la forme $(\frac{1}{2}+t,\frac{1}{2}+t,t,t) \quad t\in\mathbb{R}$

correction de l'exercice 6

On explicite l'égalité et on se ramène à la résolution d'un système, en utilisant que deux matrices sont égales si et seulement si tous ses coefficients sont égaux. On pose $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+2c=a+3b \\ b+2d=2a+4b \\ 3a+4c=c+3d \\ 3b+4d=2c+4d \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -3b+2c=0 \\ -2a-3b+2d=0 \\ 3a+3c-3d=0 \\ 3b-2c=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2a-3b+2d=0 \\ -3b+2c=0 \\ 3a+3c-3d=0 \\ 3b-2c=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \boxed{-2a-3b+2d=0} \\ -3b+2c=0 \\ -9b+6c=0 \\ 3b-2c=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } a \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3+3L_1 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2a-3b+2d=0 \\ \boxed{-3b+2c=0} \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \textit{Pivot pour } b \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4+L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=\dfrac{2}{3}c \\ a=\dfrac{3b-2d}{-2}=-c+d \end{array} \right.$$

Par conséquent, la matrice B vérifie l'égalité $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}B=B\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ si et seulement si

$$B=\begin{pmatrix} -c+d & \frac{2}{3}c \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad c,d\in\mathbb{R}$$

correction de l'exercice 7
On utilise le pivot de Gauss

$$\left\{\begin{array}{c} x-y+z=a \\ x+2y+z=b \\ x+y+2z=c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \boxed{x-y+z=a} \\ 3y=b-a \\ 2y+z=c-a \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y+z=a \\ \boxed{3y=b-a} \\ 3z=-a-2b+3c \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 3L_3-2L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b+c \\ y=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ x=a+y-z=a+b-c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=a+b-c \\ y=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ z=-\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b+c \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{l'inverse de la matrice } A \text{ est la matrice } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}$$

Vérification : Un calcul direct montre que $AA^{-1}=I_3$ donc on bien obtenu l'inverse de A.

correction de l'exercice 8
Par les opérations élémentaires sur les matrices :
<u>Inversibilité de A</u>

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;\Big|\; L_2 \leftrightarrow L_3$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice A est inversible et l'on a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1-2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2-L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible et son inverse est } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $AA^{-1}=I_3$
<u>Inversibilité de B</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left|\begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \;\Big|\; L_3 \leftarrow 3L_3-2L_2$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice B est inversible et l'on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \;\Big|\; L_2 \leftrightarrow 2L_2+L_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \;\Big|\; L_1 \leftrightarrow 6L_1+L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \left|\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } B \text{ est inversible et son inverse est } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $BB^{-1} = I_3$

<u>Inversibilité de C</u>

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \; L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \Big| \; L_3 \leftrightarrow 2L_3 - L_2$$

La nouvelle matrice est triangulaire et l'un des coefficients diagonaux est nul ce qui implique que

$$\boxed{\text{la matrice } C \text{ n'est pas inversible}}$$

<u>Inversibilité de D</u>

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \; \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow 4L_2 + L_1 \\ L_3 \leftrightarrow 2L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \Big| \; L_3 \leftrightarrow 3L_3 + L_2$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice D est inversible et l'on a

$$\begin{pmatrix} 24 & 12 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 6 & 12 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \; \begin{matrix} L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -4 & -16 & -12 \\ 6 & 12 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \Big| \; L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \; \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{24} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{12} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6} L_3 \end{matrix}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } D \text{ est inversible et son inverse est } D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $DD^{-1} = I_3$

Inversibilité de E

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&1&0\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&1&0\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftrightarrow L_4 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\-1&0&-1&1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftrightarrow L_4 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&-2&1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_4 - L_3 \end{array}\right.$$

La nouvelle matrice est triangulaire et au l'un des coefficients diagonaux est nul (le coefficient de y dans la deuxième ligne) donc

$$\boxed{\text{la matrice } E \text{ n'est pas inversible}}$$

Inversibilité de F :

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-1&1&0&1\\-1&0&1&1\\0&-1&-1&1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&1&1\\0&1&2&1\\0&-1&-1&1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&1&1\\0&0&3&1\\0&0&-1&3\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&-1&2&0\\1&1&0&2\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftrightarrow 2L_3 - L_2 \\ L_4 \leftrightarrow 2L_4 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&2&1&1\\0&0&3&1\\0&0&0&10\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&-1&2&0\\4&2&2&6\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftrightarrow 3L_4 + L_3 \end{array}\right.$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice F est inversible et l'on a

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&20&10&0\\0&0&30&0\\0&0&0&10\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}1&0&0&0\\6&8&-2&-6\\6&-12&18&-6\\4&2&2&6\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 10L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow 10L_3 - L_4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}30&30&0&0\\0&60&0&0\\0&0&30&0\\0&0&0&10\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}24&12&-18&6\\12&36&-24&-12\\6&-12&18&-6\\4&2&2&6\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 30L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}60&0&0&0\\0&60&0&0\\0&0&30&0\\0&0&0&10\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}36&-12&-12&24\\12&36&-24&-12\\6&-12&18&-6\\4&2&2&6\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{3}{5}&-\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{60}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{60}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{30}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{10}L_4 \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } F \text{ est inversible et son inverse est } F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $FF^{-1} = I_4$

Par les systèmes :

Inversibilité de A

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x+2z \\ z \\ -y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2z = a \\ z = b \\ -y+z = c \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r|l} -x+2z = a & \\ -y+z = c & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ z = b & \end{array} \right.$$

Ce dernier système est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc le système est de Cramer. Par conséquent, la matrice A est inversible et l'on a

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} z = b \\ y = -c + z = b - c \\ x = -a + 2z = -a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 2b \\ y = b - c \\ z = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est inversible et son inverse est } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $AA^{-1} = I_3$

Inversibilité de B

$$\begin{aligned} BX &= Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y+z \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = a \\ x+2y+z = b \\ x+y = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c|l} \boxed{x-y = a} & \textit{Pivot pour } x \\ 3y+z = b-a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2y = c-a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c|l} x-y = a & \\ \boxed{3y+z = b-a} & \textit{Pivot pour } y \\ -2z = -a-2b+3c & L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce dernier système est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc le système est de Cramer, ce qui implique que la matrice B est inversible et l'on a

$$BX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{-a-2b+3c}{-2} = \dfrac{1}{2}a + b - \dfrac{3}{2}c \\ y = \dfrac{b-a-z}{3} = -\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}c \\ x = a + y = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}c \\ y = -\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}c \\ z = \dfrac{1}{2}a + b - \dfrac{3}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } B \text{ est inversible et son inverse est } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $BB^{-1} = I_3$

<u>Inversibilité de C</u>

$$CX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x-2y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x-2y=a \\ x=b \\ y=c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \boxed{3x-2y=a} \\ 2y=3b-a \\ y=c \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x-2y=a \\ \boxed{2y=3b-a} \\ 0=a-3b+3c \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Ce dernier système est triangulaire et l'un des coefficients diagonaux est nul (le coefficient de z dans la troisième ligne) donc le système n'est pas de Cramer, ce qui implique que

$$\boxed{\text{la matrice } C \text{ n'est pas inversible}}$$

<u>Inversibilité de D</u>

$$DX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x+2y+z \\ -x+y-z \\ -2x-2y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 4x+2y+z=a \\ -x+y-z=b \\ -2x-2y+z=c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \boxed{4x+2y+z=a} \\ 6y-3z=4b+a \\ -2y+3z=2c+a \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 4x+2y+z=a \\ \boxed{6y-3z=4b+a} \\ 6z=4a+4b+6c \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

Ce dernier système est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc le système est de Cramer, ce qui implique que la matrice D est inversible et l'on a

$$DX = Y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \dfrac{4a+4b+6c}{6} = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{2}{3}b + c \\ y = \dfrac{4b+a+3z}{6} = \dfrac{1}{2}a + b + \dfrac{1}{2}c \\ x = \dfrac{a-2y-z}{4} = -\dfrac{1}{6}a - \dfrac{2}{3}b - \dfrac{1}{2}c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{6}a - \dfrac{2}{3}b - \dfrac{1}{2}c \\ y = \dfrac{1}{2}a + b + \dfrac{1}{2}c \\ z = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{2}{3}b + c \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } D \text{ est inversible et son inverse est } D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $DD^{-1} = I_3$

<u>Inversibilité de E</u>

$$EX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-y+2z-2t \\ z-t \\ x-y+z \\ x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y+2z-2t=a \\ z-t=b \\ x-y+z=c \\ x-y+z=d \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \boxed{x-y+2z-2t=a} \\ z-t=b \\ -z+2t=c-a \\ -z+2t=d-a \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y+2z-2t=a \\ \boxed{z-t=b} \\ t=c-a+b \\ t=d-a+b \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \textit{Pivot pour } z \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y+2z-2t=a \\ z-t=b \\ \boxed{t=c-a+b} \\ 0=d-c \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \\ \textit{Pivot pour } t \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}\right.$$

Ce dernier système est triangulaire et l'un des coefficients diagonaux est nul (le coefficient de y dans la deuxième ligne) donc le système n'est pas de Cramer, ce qui implique que

$$\boxed{\text{la matrice } E \text{ n'est pas inversible}}$$

Remarque : après avoir effectuer le pivot pour x, on constate que y n'apparait dans aucune des trois autres équations donc nécessairement le système ne peut être de Cramer car y n'aura jamais une valeur définie donc il s'agira d'une variable libre, ce qui est absurde dans un système de Cramer

<u>Inversibilité de F</u>

$$FX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y+z \\ -x+y+t \\ -x+z+t \\ -y-z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ -x+y+t=b \\ -x+z+t=c \\ -y-z+t=d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \boxed{x+y+z=a} \\ 2y+z+t=b+a \\ y+2z+t=c+a \\ -y-z+t=d \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } x \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=a \\ \boxed{2y+z+t=b+a} \\ 3z+t=a-b+2c \\ -z+3t=2d+b+a \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } y \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=a \\ 2y+z+t=b+a \\ \boxed{3z+t=a-b+2c} \\ 10t=4a+2b+2c+6d \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \textit{Pivot pour } z \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_3 \end{array} \right.$$

Ce dernier système est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc le système est de Cramer, ce qui implique que la matrice F est inversible et l'on a

$$FX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{4a+2b+2c+6d}{10} = \dfrac{2}{5}a + \dfrac{1}{5}b + \dfrac{1}{5}c + \dfrac{3}{5}d \\ z = \dfrac{a-b+2c-t}{3} = \dfrac{1}{5}a - \dfrac{2}{5}b + \dfrac{3}{5}c - \dfrac{1}{5}d \\ y = \dfrac{a+b-z-t}{2} = \dfrac{1}{5}a + \dfrac{3}{5}b - \dfrac{2}{5}c - \dfrac{1}{5}d \\ x = a-y-z = \dfrac{3}{5}a - \dfrac{1}{5}b - \dfrac{1}{5}c + \dfrac{2}{5}d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5}a - \dfrac{1}{5}b - \dfrac{1}{5}c + \dfrac{2}{5}d \\ y = \dfrac{1}{5}a + \dfrac{3}{5}b - \dfrac{2}{5}c - \dfrac{1}{5}d \\ z = \dfrac{1}{5}a - \dfrac{2}{5}b + \dfrac{3}{5}c - \dfrac{1}{5}d \\ t = \dfrac{2}{5}a + \dfrac{1}{5}b + \dfrac{1}{5}c + \dfrac{3}{5}d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la matrice } F \text{ est inversible et son inverse est } F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

Vérification : un calcul direct montre que $FF^{-1} = I_4$