

correction de l'exercice 1

Je laisse le soin au lecteur que chaque fonction sous le symbole intégrale est une fonction continue sur l'intervalle fermé d'intégration. Chacune de ces intégrales se calculent à l'aide de primitives :

I_1 : La fonction $t \mapsto (t+1)(t+2)^2 = t^3 + 5t^2 + 8t + 4$ admet $t \mapsto \frac{t^4}{4} + \frac{5t^3}{3} + 4t^2 + 4t$ pour primitive donc

$$I_1 = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^3}{3} + 4t^2 + 4t \right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{34}{3}$$

I_2 : La fonction $x \mapsto \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x}) = x^{3/2} - 2x$ admet $x \mapsto \frac{x^{3/2}}{3/2} - x^2 = \frac{2x^{3/2}}{3} - x^2$ pour primitive donc

$$I_2 = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - x^2 \right]_{x=0}^{x=4} = -\frac{16}{5} \quad (\text{remarque : } 4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8)$$

I_3 : La fonction $u \mapsto 3^u = \exp(u \ln 3)$ admet $u \mapsto \frac{\exp(u \ln 3)}{\ln 3} = \frac{3^u}{\ln 3}$ pour primitive donc

$$I_3 = \left[\frac{3^u}{\ln 3} \right]_{u=1}^{u=2} = \frac{6}{\ln 3}$$

I_4 : La fonction $y \mapsto \frac{1}{y\sqrt{y}} = y^{-3/2}$ admet pour primitive $y \mapsto \frac{y^{-1/2}}{-1/2} = -2y^{-1/2} = \frac{-2}{\sqrt{y}}$ donc

$$I_4 = \left[\frac{-2}{\sqrt{y}} \right]_{y=1}^4 = 1$$

I_5 : On reconnaît un début de formule du type $u'e^u$. En posant $u = z^2 - z$, on a $u' = 2z - 1$ donc $(2z - 1) \exp(z^2 - z) = u' \exp(u)$, dont une primitive est $e^u = \exp(z^2 - z)$, ce qui implique

$$I_5 = [\exp(z^2 - z)]_{z=0}^{z=1} = 0$$

I_6 : On reconnaît un début de formule du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. En posant $u = 1 + a^3$, on a $u' = 3a^2 \Leftrightarrow \frac{u'}{3} = a^2$ donc $\frac{a^2}{\sqrt{1+a^3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3} \cdot u' u^{-1/2}$ dont une primitive est $\frac{1}{3} \cdot \frac{u^{1/2}}{1/2} = \frac{2}{3} u^{1/2} = \frac{2}{3} \sqrt{1+a^3}$, ce qui implique

$$I_6 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{1+a^3} \right]_{a=1}^{a=2} = 2 - \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

I_7 : On reconnaît un début de formule du type $\frac{u'}{u}$. En posant $u = 2 + 3c^{3/2}$, on a $u' = \frac{9}{2} c^{1/2} = \frac{9}{2} \sqrt{c} \Leftrightarrow 2\sqrt{c} = \frac{4}{9} u'$ donc $\frac{2\sqrt{c}}{2+3c^{3/2}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\frac{4}{9} \ln |u| = \frac{4}{9} \ln |2 + 3c^{3/2}|$, ce qui implique

$$I_7 = \left[\frac{4}{9} \ln |2 + 3c^{3/2}| \right]_{c=1}^{c=2} = \frac{4}{9} \ln (2 + 6\sqrt{2}) - \frac{4}{9} \ln 5 = \frac{4}{5} \ln \left(\frac{2 + 6\sqrt{2}}{5} \right)$$

I_8 : On reconnaît un début de formule du type $u'u^5$. En posant $u = \ln b$, on a $u' = \frac{1}{b}$ donc $\frac{(\ln b)^5}{b} = u'u^5$ dont une primitive est $\frac{u^6}{6} = \frac{(\ln b)^6}{6}$, ce qui implique

$$I_8 = \left[\frac{(\ln b)^6}{6} \right]_{b=1}^{b=e} = \frac{1}{6}$$

I_9 : On reconnaît un début de formule du type $\frac{u'}{u}$. En posant $u' = e^{2t} + 2$, on a $u' = 2e^{2t} \Leftrightarrow e^{2t} = \frac{1}{2} u'$ donc $\frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u}$ dont une primitive est $\frac{1}{2} \ln |u| = \frac{1}{2} \ln |e^{2t} + 2|$, ce qui implique

$$I_9 = \left[\frac{1}{2} \ln |e^{2t} + 2| \right]_{t=0}^{t=(\ln 2)/2} = \frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \quad (\text{remarque : } e^{\ln 2} = 2)$$

I_{10} : On reconnaît un début de formule du type $u'u$. En posant $u = \ln(3\gamma)$, on a $u' = \frac{(3\gamma)'}{(3\gamma)} = \frac{1}{\gamma}$ donc $\frac{\ln(3\gamma)}{\gamma} = u'u$ dont une primitive est $\frac{u^2}{2} = \frac{(\ln(3\gamma))^2}{2}$, ce qui implique

$$I_{10} = \left[\frac{(\ln(3\gamma))^2}{2} \right]_{\gamma=e}^{\gamma=e^3} = \frac{(\ln(3e^3))^2}{2} - \frac{(\ln(3e))^2}{2} = \frac{(\ln 3 + 3)^2 - (\ln 3 + 1)^2}{2} = 2 \ln 3 + 4$$

I_{11} : On reconnaît un début de formule du type $u' \exp(u)$. En posant $u = -\beta^5$, on a $u' = -5\beta^4 \Leftrightarrow \beta^4 = -\frac{1}{5}u'$ donc $\beta^4 \exp(-\beta^5) = -\frac{1}{5}u' \exp(u)$ dont une primitive est $-\frac{1}{5} \exp(u) = -\frac{1}{5} \exp(-\beta^5)$, ce qui implique

$$I_{11} = \left[-\frac{1}{5} \exp(-\beta^5) \right]_{\beta=0}^{\beta=2} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} e^{-32}$$

I_{12} : On reconnaît un début de formule du type $\frac{u'}{u^4}$. En posant $u = \alpha^2 - 2\alpha$, on a $u' = 2\alpha - 2 = 2(\alpha - 1) \Leftrightarrow 1 - \alpha = -\frac{1}{2}u'$ donc $\frac{1 - \alpha}{(\alpha^2 - 2\alpha)^4} = -\frac{1}{2} \frac{u'}{u^4} = -\frac{1}{2} u' u^{-4}$ dont une primitive est $-\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-3}}{-3} = \frac{1}{6u^3} = \frac{1}{6(\alpha^2 - 2\alpha)^3}$, ce qui implique

$$I_{12} = \left[\frac{1}{6(\alpha^2 - 2\alpha)^3} \right]_{\alpha=1/2}^{\alpha=3/2} = 0$$

I_{13} : On reconnaît un début de formule du type $u'u^{3/2}$. En posant $u = x^3 + 1$, on a $u' = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}u'$ donc $x^2(x^3 + 1)^{3/2} = \frac{1}{3}u'u^{3/2}$ dont une primitive est $\frac{1}{3} \cdot \frac{u^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{15} (x^3 + 1)^{5/2}$, ce qui implique

$$I_{13} = \left[\frac{2}{15} (x^3 + 1)^{5/2} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{484}{15} \quad (\text{remarque : } 9^{5/2} = (9^{1/2})^5 = (\sqrt{9})^5 = 3^5 = 243)$$

I_{14} : On reconnaît un début de formule du type $\frac{u'}{u^{2006}}$. En posant $u = 1 + s^{2005}$, on a $u' = 2005 \cdot s^{2004} \Leftrightarrow s^{2004} = \frac{1}{2005}u'$ donc $\frac{s^{2004}}{(1 + s^{2005})^{2006}} = \frac{1}{2005} \frac{u'}{u^{2006}} = \frac{1}{2005} u' u^{-2005}$ dont une primitive est

$$\frac{1}{2005} \cdot \frac{u^{-2004}}{-2004} = -\frac{1}{2005 \times 2004 u^{2004}} = -\frac{1}{2005 \times 2004 (1 + s^{2005})^{2004}}$$

ce qui implique

$$I_{14} = \left[-\frac{1}{2005 \times 2004 (1 + s^{2005})^{2004}} \right]_{s=0}^{s=1} = -\frac{1}{2005 \times 2004 \times 2^{2004}} + \frac{1}{2005 \times 2004} = \frac{1}{2005 \times 2004} \left(1 - \frac{1}{2^{2004}} \right)$$

I_{15} : On reconnaît une forme du type $u' \exp(u)$. En posant $u = -\sqrt{\zeta}$, on a $u' = -\frac{1}{2\sqrt{\zeta}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\zeta}} = -2u'$ donc $\frac{e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}} = -2u' \exp(u)$ dont une primitive est $-2 \exp(u) = -2 \exp(-\sqrt{\zeta})$, ce qui implique

$$I_{15} = \left[-2 \exp(-\sqrt{\zeta}) \right]_{\zeta=1}^{\zeta=4} = 2e^{-1} - 2e^{-2} = 2e^{-2}(e - 1) = \frac{2(e - 1)}{e^2}$$

I_{16} : On reconnaît une formule du type $\frac{v'}{v}$. En posant $v = e^u + e^{-u}$, on a $v' = e^u + e^{-u}$ donc $\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{v'}{v}$ dont une primitive est $\ln |v| = \ln |e^u + e^{-u}|$, ce qui implique

$$I_{16} = \left[\ln |e^u + e^{-u}| \right]_{u=-4}^{u=4} = 0$$

I_{17} : On reconnaît une formule du type $u' \exp(u)$. En posant $u = -\frac{3}{v^2} = -3v^{-2}$, on a $u' = 6v^{-3} = \frac{6}{v^3} \Leftrightarrow \frac{1}{v^3} = \frac{1}{6}u'$ donc $\frac{\exp(-3/v^2)}{v^3} = \frac{1}{6}u' \exp(u)$ dont une primitive est $\frac{1}{6} \exp(u) = \frac{1}{6} \exp\left(-\frac{3}{v^2}\right)$, ce qui implique

$$I_{17} = \left[\frac{1}{6} \exp\left(-\frac{3}{v^2}\right) \right]_{v=1}^{v=\sqrt{3}} = \frac{1}{6} e^{-1} - \frac{1}{6} e^{-3}$$

I_{18} : On reconnaît une formule du type $\frac{u'}{\sqrt[3]{u}}$. En posant $u = 1 + 7y^5$, on a $u' = 35y^4 \Leftrightarrow y^4 = \frac{1}{35}u'$ donc $\frac{y^4}{\sqrt[3]{1+7y^5}} = \frac{1}{35} \frac{u'}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{35} u' u^{-1/3}$ dont une primitive est $\frac{1}{35} \cdot \frac{u^{2/3}}{2/3} = \frac{3}{70} u^{2/3} = \frac{3}{70} (1 + 7y^5)^{2/3}$, ce qui implique

$$I_{18} = \left[\frac{3}{70} (1 + 7y^5)^{2/3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{70} (4 - 1) = \frac{9}{70} \quad (\text{remarque : } 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = ((2^3)^{1/3})^2 = 2^2 = 4)$$

correction de l'exercice 2

A : On pose $\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{3x} & v = \frac{e^{3x}}{3} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} A &= \left[x \times \frac{e^{3x}}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{1}{3} e^{-3} + \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{-3} + \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3} \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{1}{3} e^{-3} + \frac{1}{3} e^3 + \frac{1}{9} e^{-3} - \frac{1}{9} e^3 = \frac{4}{9} e^{-3} + \frac{2}{9} e^3 \end{aligned}$$

B : On pose $\begin{cases} u = t^2 + t & u' = 2t + 1 \\ v' = e^{2t} & v = \frac{e^{2t}}{2} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$B = \left[(t^2 + t) \frac{e^{2t}}{2} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (2t + 1) \frac{e^{2t}}{2} dt = e^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 (2t + 1) e^{2t} dt$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on pose $\begin{cases} u = 2t + 1 & u' = 2 \\ v' = e^{2t} & v = \frac{e^{2t}}{2} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2t + 1) e^{2t} dt &= \left[(2t + 1) \frac{e^{2t}}{2} \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 2 \frac{e^{2t}}{2} dt = \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} - \int_0^1 e^{2t} dt = \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} - \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} = e^2 \Rightarrow B = e^2 - \frac{1}{2} e^2 = \frac{e^2}{2} \end{aligned}$$

C_n On pose $\begin{cases} a = \ln(u) & a' = \frac{1}{u} \\ b' = u^n & b = \frac{u^{n+1}}{n+1} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} C_n &= \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \ln(u) \right]_{u=1}^e - \int_1^e \frac{u^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{u} du = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_1^e u^n du = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1} \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{u=1}^e \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

D On pose $\begin{cases} a = \ln(u) & a' = \frac{1}{v} \\ b' = \frac{1}{v} & b = \ln|v| = \ln v \text{ (car } v \in [\sqrt{e}, e] \text{ donc } v > 0) \end{cases}$, ce qui nous donne

$$D = [(\ln v)^2]_{v=\sqrt{e}}^{v=e} - \int_{\sqrt{e}}^e \frac{1}{v} \ln(v) dv = 1 - \frac{1}{4} - D \Leftrightarrow D = \frac{3}{4} - D \Leftrightarrow 2D = \frac{3}{4} \Leftrightarrow D = \frac{3}{8}$$

E On pose $\begin{cases} u = \ln s & u' = \frac{1}{s} \\ v' = \sqrt{3}s = \sqrt{3}s^{1/2} & v = \sqrt{3} \frac{s^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} s^{3/2} \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} E &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}} s^{3/2} \ln s \right]_{s=1}^{s=4} - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{3}} s^{3/2} \times \frac{1}{s} ds = \frac{16}{\sqrt{3}} \ln 4 - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^4 s^{1/2} ds = \frac{16}{\sqrt{3}} \ln 4 - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{s^{3/2}}{3/2} \right]_{s=1}^{s=4} \\ &= \frac{16}{\sqrt{3}} \ln 4 - \frac{4}{3\sqrt{3}} (8 - 1) = \frac{16}{\sqrt{3}} \ln 4 - \frac{28}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

remarque $4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$)

$$\boxed{F} \text{ On pose } \begin{cases} u = \ln(1+2t) & u' = \frac{(1+2t)'}{1+2t} = \frac{2}{1+2t} \\ v' = \frac{1}{(1+2t)^3} = (1+2t)^{-3} & v = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot -2} = -\frac{1}{4(1+2t)^2} \end{cases}, \text{ ce qui nous donne}$$

$$\begin{aligned} F &= \left[-\frac{1}{4(1+2t)^2} \times \ln(1+2t) \right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 -\frac{1}{4(1+2t)^2} \times \frac{2}{1+2t} dt = -\frac{1}{36} \ln 3 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{(1+2t)^3} \\ &= -\frac{1}{36} \ln 3 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \times \frac{(1+2t)^{-2}}{-2} \right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{1}{36} \ln 3 - \frac{1}{8} \left[\frac{1}{(1+2t)^2} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{9} - \frac{1}{36} \ln 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{G} \text{ On pose } \begin{cases} u = \ln(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 2x^3 + 1 & v = \frac{x^4}{4} + x \end{cases}, \text{ ce qui nous donne}$$

$$\begin{aligned} G &= \left[\left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x \right]_{x=1}^{x=e^2} - \int_1^{e^2} \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \frac{dx}{x} = e^8 + 2e^2 - \int_1^{e^2} \left(\frac{x^3}{4} + 1 \right) dx = e^8 + 2e^2 - \left[\frac{x^4}{16} + x \right]_{x=1}^{x=e^2} \\ &= e^8 + 2e^2 - \frac{1}{16} e^8 - e^2 + \frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16} e^8 + e^2 + \frac{17}{16} \end{aligned}$$

\boxed{H} On effectue 4 intégrations par parties successives, en intégrant systématiquement l'exponentielle et en dérivant la puissance, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} H &= [y^4 e^y]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 4y^3 e^y dy = e - 4 \int_0^1 y^3 e^y dy = e - 4 \left([y^3 e^y]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 3y^2 e^y dy \right) = e - 4 \left(e - 3 \int_0^1 y^2 e^y dy \right) \\ &= -3e + 12 \int_0^1 y^2 e^y dy = -3e + 12 \left([y^2 e^y]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 2y e^y dy \right) = -3e + 12 \left(e - 2 \int_0^1 y e^y dy \right) = 9e - 24 \int_0^1 y e^y dy \\ &= 9e - 24 \left([y e^y]_{y=0}^{y=1} - \int_0^1 1 e^y dy \right) = 9e - 24 \left(e - \int_0^1 e^y dy \right) = -15e + 24 \int_0^1 e^y dy = -15e + 24 [e^y]_{y=0}^{y=1} \\ &= -15e + 24(e - 1) = 9e - 24 \end{aligned}$$

\boxed{I} On effectue trois intégrations par parties successives, en intégrant systématiquement la puissance et en dérivant la puissance du logarithme ($[(\ln z)^k]' = k(\ln z)'(\ln z)^{k-1} = k \frac{(\ln z)^{k-1}}{z}$), ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{z^3}{3} (\ln z)^3 \right]_{z=1}^z - \int_1^z \frac{z^3}{3} \times \frac{3(\ln z)^2}{z} dz = \frac{e^3}{3} - \int_1^e z^2 (\ln z)^2 dz = \frac{e^3}{3} - \left(\left[\frac{z^3}{3} (\ln z)^2 \right]_{z=1}^{z=e} - \int_1^e \frac{z^3}{3} \times \frac{2 \ln z}{z} dz \right) \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e z^2 \ln z dz \right) = \frac{2}{3} \int_1^e z^2 \ln z dz = \frac{2}{3} \left(\left[\frac{z^3}{3} \ln z \right]_{z=1}^{z=e} - \int_1^e \frac{z^3}{3} \times \frac{1}{z} dz \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e z^2 dz \right) \\ &= \frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{9} \int_1^e z^2 dz = \frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{9} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=1}^{z=e} = \frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{27} e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4}{27} e^3 + \frac{2}{27} \end{aligned}$$

$$\boxed{J} \text{ On pose } \begin{cases} u = \ln(3x+1) & u' = \frac{(3x+1)'}{3x+1} = \frac{3}{3x+1} \\ v' = (3x+1)^3 & v = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^4}{4} = \frac{(3x+1)^4}{12} \end{cases}, \text{ ce qui nous donne}$$

$$\begin{aligned} J &= \left[\frac{(3x+1)^4}{12} \ln(3x+1) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{(3x+1)^4}{12} \times \frac{3}{3x+1} dx = \frac{64}{3} \ln 4 - \frac{1}{4} \int_0^1 (3x+1)^3 dx \\ &= \frac{64}{3} \ln 4 - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \times \frac{(3x+1)^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{64}{3} \ln 4 - \frac{1}{48} (256 - 1) = \frac{64}{3} \ln 4 - \frac{85}{16} \end{aligned}$$

\boxed{K} En remarquant que $\ln y = 1 \times \ln y$, on pose $\begin{cases} u = \ln y & u' = \frac{1}{y} \\ v' = 1 & v = y \end{cases}$, ce qui nous donne

$$K = [y \ln y]_{y=1}^{y=e} - \int_1^e y \times \frac{1}{y} dy = e - \int_1^e dy = e - [y]_{y=1}^{y=e} = 1$$

\boxed{L} En remarquant que $\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = 1 \times \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$, on pose $\begin{cases} u = \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) & u' = \frac{\left(1 + \frac{1}{t}\right)'}{1 + \frac{1}{t}} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t+1}{t}} = -\frac{1}{t(t+1)} \\ v' = 1 & v = t \end{cases}$,

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} L &= \left[t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right]_{t=1}^{t=2} - \int_1^2 t \left(-\frac{1}{t(t+1)}\right) dt = 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln 2 + \int_1^2 \frac{dt}{t+1} = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 - \ln 2 + [\ln(t+1)]_{t=1}^{t=2} \\ &= 2 \ln 3 - 3 \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = 3 \ln 3 - 4 \ln 2 \end{aligned}$$

\boxed{M} On pose $\begin{cases} u = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right) & u' = \frac{\left(1 + \frac{1}{s}\right)'}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{-\frac{1}{s^2}}{\frac{s+1}{s}} = -\frac{1}{s(s+1)} \\ v' = 1 + 2s & v = s + s^2 \end{cases}$, ce qui nous donne

$$M = \left[(s + s^2) \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right) \right]_{s=1}^{s=2} - \int_1^2 (s + s^2) \left(-\frac{1}{s(s+1)}\right) ds = 6 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 \ln 2 + \int_1^2 ds = 6 \ln 3 - 8 \ln 2 + [s]_{s=1}^{s=2} = 6 \ln 3 - 8 \ln 2 + 1$$

\boxed{N} On pose $\begin{cases} u = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} & u' = \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}} = \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}} \\ v' = 1 - 2x & v = x - x^2 \end{cases}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} N &= \left[(x - x^2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right]_{x=0}^{x=1/2} - \int_0^{1/2} (x - x^2) \frac{1}{(1-x)^{3/2}\sqrt{1+x}} dx \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{3} - \int_0^{1/2} \frac{x(1-x)}{(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} dx = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

On remarque dans la fonction intervenant dans la dernière intégrale est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. En posant $u = 1 - x^2$, on a $u' = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}u'$ donc $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}u'u^{-1/2}$ dont une primitive est $-\frac{1}{2} \times \frac{u^{1/2}}{1/2} = -u^{1/2} = -\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2}$, ce qui permet d'écrire

$$N = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{3}{4}\sqrt{3} - 1$$

correction de l'exercice 3

a) On pose $\begin{cases} u = \ln(x) & a' = \frac{1}{x} \\ b' = \frac{1}{x} & b = \ln|x| = \ln x \text{ (car } x \in [a, 1/a] \text{ donc } x > 0) \end{cases}$, ce qui nous donne

$$I(a) = \int_a^{1/a} (\ln x) \frac{1}{x} dx = [(\ln x)^2]_{x=a}^{x=1/a} - \int_a^{1/a} \frac{1}{x} (\ln x) dx = \left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)^2 - (\ln a)^2 - I(a)$$

$$I(a) = (-\ln a)^2 - (\ln a)^2 - I(a) = -I(a) \Leftrightarrow 2I(a) = 0 \Leftrightarrow I(a) = 0$$

b) On pose $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, quand $x = a$, $t = \frac{1}{a}$ et quand $x = \frac{1}{a}$, $t = a$ donc

$$I(a) = \int_{1/a}^a \ln\left(\frac{1}{t}\right) t \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = - \int_{1/a}^a (-\ln t) \frac{dt}{t} = \int_{1/a}^a \frac{\ln t}{t} dt = - \int_a^{1/a} \frac{\ln t}{t} dt \quad (\text{par le relation de Chasles})$$

$$I(a) = -I(a) \Leftrightarrow 2I(a) = 0 \Leftrightarrow I(a) = 0$$

correction de l'exercice 4

À l'aide de changement de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :

A On pose $z = 3w + 1 \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{3}$, $dw = \frac{dz}{3}$, quand $w = 0$, $z = 1$, quand $w = 1$, $z = 4$, ce qui nous donne

$$A = \int_1^4 \frac{z-1}{3} \sqrt{z} \frac{dz}{3} = \frac{1}{9} \int_1^4 (z^{3/2} - z^{1/2}) dz = \frac{1}{9} \left[\frac{z^{5/2}}{5/2} - \frac{z^{3/2}}{3/2} \right]_{z=1}^{z=4} = \frac{1}{9} \left(\frac{2}{5} \times 2^5 - \frac{2}{3} \times 2^3 - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \right) = \frac{116}{135}$$

remarque : $4^{5/2} = (4^{1/2})^5 = (\sqrt{4})^5 = 2^5$, $4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3$

B On pose $x = \ln t \Leftrightarrow t = e^x$, $dt = e^x dx$, quand $t = 1$, $x = 0$ et quand $t = e$, $x = 1$, ce qui nous donne

$$B = \int_0^1 \frac{x}{e^x} e^x dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

C On pose $v = e^x \Leftrightarrow x = \ln v$, $dx = \frac{dv}{v}$, quand $x = 0$, $v = 1$ et quand $x = 1$, $v = e$, ce qui nous donne

$$C = \int_1^e \frac{1}{v+1} \frac{dv}{v} = \int_1^e \frac{1}{v(v+1)} dv = \int_1^e \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \right) dv = [\ln |v| - \ln |v+1|]_{v=1}^{v=e} = 1 - \ln(e+1) + \ln 2$$

D On pose $t = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow tx + t = x \Leftrightarrow x(1-t) = t \Leftrightarrow x = \frac{t}{1-t}$, $dx = \left(\frac{t}{1-t} \right)' dt = \frac{dt}{(1-t)^2}$.

Quand $x = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{3}$ et quand $x = 1$, $t = \frac{1}{2}$ donc

$$D = \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{\left(\frac{t}{1-t}\right) \left(\frac{t}{1-t} + 1\right)} \ln t \frac{dt}{(1-t)^2} = \int_{1/3}^{1/2} \frac{(1-t)^2}{t} \ln t \frac{dt}{(1-t)^2} = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt$$

Pour cette dernière intégrale, on procède par intégration par partie en intégrant $\frac{1}{t}$ et en dérivant $\ln t$, ce qui nous donne

$$\int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt = [(\ln t)^2]_{t=1/3}^{t=1/2} - \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt \Leftrightarrow 2 \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt = \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) \right)^2 - \left(\ln\left(\frac{1}{3}\right) \right)^2 \Leftrightarrow 2 \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt = (\ln 2)^2 - (\ln 3)^2$$

$$\int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln t}{t} dt = \frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{2} \Rightarrow D = \frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{2}$$

E On pose $\alpha = s^3 + 1 \Leftrightarrow s = (\alpha - 1)^{1/3}$, $ds = \frac{1}{3}(\alpha - 1)^{-2/3} d\alpha$, quand $s = 1$, $\alpha = 2$ et quand $s = 2$, $\alpha = 9$, ce qui nous donne

$$E = \int_2^9 \frac{1}{(\alpha - 1)^{1/3} s} \times \frac{1}{3} \times (\alpha - 1)^{-2/3} d\alpha = \frac{1}{3} \int_2^9 \frac{(\alpha - 1)^{-1/3} (\alpha - 1)^{-2/3}}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{3} \int_2^9 \frac{(\alpha - 1)^{-1}}{\alpha} d\alpha$$

$$= \frac{1}{3} \int_2^9 \frac{d\alpha}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{1}{3} \int_2^9 \left(\frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha} \right) d\alpha = \frac{1}{3} [\ln |\alpha - 1| - \ln |\alpha|]_{\alpha=2}^{\alpha=9} = \frac{1}{3} (\ln 8 - \ln 9 + \ln 2)$$

$$= \frac{\ln 2^3 - \ln 3^2 + \ln 2}{3} = \frac{3 \ln 2 - 2 \ln 3 + \ln 2}{3} = \frac{3 \ln 4 - 2 \ln 3}{3}$$

\boxed{F} On pose $v = u^2 + 1 \Leftrightarrow u = -\sqrt{v-1}$ (car $u \in [-1, 0]$), $du = -\frac{dv}{2\sqrt{v-1}}$, quand $u = -1$, $v = 2$ et quand $u = 0$, $v = 1$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} F &= \int_2^1 \frac{(-\sqrt{v-1})^3}{v\sqrt{v}} \left(-\frac{dv}{2\sqrt{v-1}} \right) = \frac{1}{2} \int_2^1 \frac{(v-1)^{3/2}}{v^{3/2}} \frac{dv}{(v-1)^{1/2}} = \frac{1}{2} \int_2^1 \frac{v-1}{v^{3/2}} dv = \frac{1}{2} \int_2^1 \left(\frac{1}{v^{1/2}} - \frac{1}{v^{3/2}} \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_2^1 (v^{-1/2} - v^{-3/2}) dv = \frac{1}{2} \left[\frac{v^{1/2}}{1/2} - \frac{v^{-1/2}}{-1/2} \right]_{v=2}^{v=1} = \frac{1}{2} \left[2v^{1/2} + 2v^{-1/2} \right]_{v=2}^{v=1} = \left[v^{1/2} + v^{-1/2} \right]_{v=2}^{v=1} \\ &= 2 - \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

\boxed{G} On pose $x = t^2 + 1 \Leftrightarrow t = \sqrt{x-1}$ (puisque $t \in [0, 3]$) et $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$. Quand $t = 0$, $x = 1$ et quand $t = 3$, $x = 10$, ce qui nous donne

$$G = \int_1^{10} \frac{\sqrt{x-1} \times \ln x}{x} \frac{dx}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \int_1^{10} \frac{\ln x}{x} dx$$

Pour cette dernière intégrale, on procède par une intégration par parties en intégrant $\frac{1}{x}$ et en dérivant $\ln x$, ce qui nous donne

$$\int_1^{10} \frac{\ln x}{x} dx = [(\ln x)^2]_{x=1}^{x=10} - \int_1^{10} \frac{\ln x}{x} dx \Leftrightarrow 2 \int_1^{10} \frac{\ln x}{x} dx = (\ln 10)^2 \Leftrightarrow \int_1^{10} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{(\ln 10)^2}{2} \Rightarrow G = \frac{(\ln 10)^2}{4}$$

correction de l'exercice 5

Pour comparer deux intégrales, il existe deux approches.

Soit les intégrales portent sur un même segment mais sur des fonctions distinctes : on utilise que $f - g$ est de signe constant sur un segment I alors $\int_I f - \int_I g = \int_I (f - g)$ qui est du signe de $f - g$ sur I (lorsque les bornes sont dans l'ordre croissant)

Soit les intégrales portent sur une même fonction mais sur des intervalles distincts : on utilise la relation de Chasles $\int_a^b f - \int_a^c f = \int_c^b f$ puis le signe de f sur le segment $[c, b]$ pour obtenir le signe de $\int_c^b f$ donc de $\int_a^b f - \int_a^c f$ (lorsque les bornes sont dans l'ordre croissant, c'est-à-dire $c \leq b$)

$\boxed{a_n}$ (fonction commune)

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{n+1} \exp(-t^2) dt - \int_0^n \exp(-t^2) dt = \int_n^{n+1} \underbrace{\exp(-t^2)}_{\geq 0 \text{ sur } [n, n+1]} dt \geq 0 \quad (\text{car } n \leq n+1)$$

(puisque $n \leq n+1$) donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$, ce qui implique que la suite $(a_n)_n$ est croissante.

$\boxed{b_n}$ (fonction commune)

$$b_{n+1} - b_n = \int_0^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \int_0^n \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \int_n^{n+1} \underbrace{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}_{\geq 0 \text{ sur } [n, n+1]} dx \geq 0 \quad (\text{car } n \leq n+1)$$

$b_{n+1} - b_n \geq 0$, ce qui implique que la suite $(b_n)_n$ est croissante.

$\boxed{c_n}$ (fonction commune)

$$c_{n+1} - c_n = \int_0^{1/(n+1)} \frac{x}{1+x^3} dx - \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3} dx = \int_{1/n}^{1/(n+1)} \frac{x}{1+x^3} dx = - \int_{1/(n+1)}^{1/n} \underbrace{\frac{x}{1+x^3}}_{\geq 0 \text{ sur } [1/(n+1), 1/n]} dx \leq 0 \quad (\text{car } \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n})$$

$c_{n+1} - c_n \leq 0$, ce qui implique que la suite $(c_n)_n$ est décroissante.

$\boxed{d_n}$ (fonction commune) Lorsque $n \geq 1$ et $x \in [n, n+1]$, alors $x \geq 1 \Rightarrow 1-x \leq 0 \Rightarrow (1-x)^3 \leq 0$ et l'on a

$$d_{n+1} - d_n = \int_1^{n+1} (1-x)^3 e^x dx - \int_1^n (1-x)^3 e^x dx = \int_n^{n+1} (1-x)^3 e^x dx \int_n^{n+1} \underbrace{(1-x)^3 e^x}_{\leq 0 \text{ sur } [n, n+1]} dx \leq 0 \quad (\text{car } n \leq n+1)$$

$d_{n+1} - d_n \leq 0$, ce qui implique que la suite $(d_n)_n$ est décroissante.

$\boxed{e_n}$ (intervalle commun)

$$e_{n+1} - e_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{\overbrace{x^n}^{\geq 0} \overbrace{(x-1)}^{\leq 0}}{\underbrace{1+x}_{\geq 0}} dx \leq 0 \quad (\text{car } 0 \leq 1)$$

donc $e_{n+1} - e_n \leq 0$, ce qui implique que la suite $(e_n)_n$ est décroissante.

$\boxed{f_n}$ (intervalle commun)

$$f_{n+1} - f_n = \int_1^2 (\ln t)^{n+1} dt - \int_1^2 (\ln t)^n dt = \int_1^2 [(\ln t)^{n+1} - (\ln t)^n] dt = \int_1^2 \overbrace{(\ln t)^n}^{\geq 0} \overbrace{[(\ln t) - 1]}^{\leq 0} dt \leq 0 \quad (\text{car } 1 \leq 2 \text{ et } \ln t \leq \ln 2 \leq \ln e = 1)$$

donc $f_{n+1} - f_n \leq 0$, ce qui implique que la suite $(f_n)_n$ est décroissante.

$\boxed{g_n}$ (intervalle commun)

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= \int_0^1 x \exp(-(n+1)^2 x) dx - \int_0^1 x \exp(-n^2 x) dx = \int_0^1 x [\exp(-(n+1)^2 x) - \exp(-n^2 x)] dx \\ &= \int_0^1 x [\exp(-n^2 x - 2nx - x) - \exp(-n^2 x)] dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{x}_{\geq 0} \underbrace{\exp(-n^2 x)}_{\geq 0} \overbrace{[\exp(-2nx - x) - 1]}^{\leq 0} dx \leq 0 \quad (\text{car } 0 \leq 1 \text{ et } e^a \leq e^0 = 1 \text{ lorsque } a \leq 0) \end{aligned}$$

donc $g_{n+1} - g_n \leq 0$, ce qui implique que la suite $(g_n)_n$ est décroissante

$\boxed{h_n}$ (intervalle commun)

$$\begin{aligned} h_{n+1} - h_n &= \int_{-1}^0 x \exp((n+1)^2 x) dx - \int_{-1}^0 x \exp(n^2 x) dx = \int_{-1}^0 x [\exp((n+1)^2 x) - \exp(n^2 x)] dx \\ &= \int_{-1}^0 x [\exp(n^2 x + 2nx + x) - \exp(n^2 x)] dx \\ &= \int_{-1}^0 \underbrace{x}_{\leq 0} \underbrace{\exp(n^2 x)}_{\geq 0} \overbrace{[\exp(2nx + x) - 1]}^{\leq 0} dx \geq 0 \quad (\text{car } -1 \leq 0 \text{ et } e^a \leq e^0 = 1 \text{ lorsque } a \leq 0) \end{aligned}$$

donc $h_{n+1} - h_n \geq 0$, ce qui implique que la suite $(h_n)_n$ est croissante

$\boxed{i_n}$ (fonction commune)

$$i_{n+1} - i_n = \int_1^{1/(n+1)} (\ln y)^3 dy - \int_1^{1/n} (\ln y)^3 dy = \int_{1/n}^{1/(n+1)} (\ln y)^3 dy = - \int_{1/(n+1)}^{1/n} \overbrace{(\ln y)^3}^{\leq 0} dy \geq 0 \quad (\text{car } \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \text{ et } y \leq \frac{1}{n} \leq 1)$$

donc $i_{n+1} - i_n \geq 0$, ce qui implique que la suite $(i_n)_n$ est croissante.

$\boxed{j_n}$ (intervalle commun)

$$\begin{aligned} j_{n+1} - j_n &= \int_1^2 \frac{u^{1/(n+1)}}{1+u} du - \int_1^2 \frac{u^{1/n}}{1+u} du = \int_1^2 \frac{u^{1/(n+1)} - u^{1/n}}{1+u} du = \int_1^2 u^{1/(n+1)} \frac{1 - u^{1/n - 1/(n+1)}}{1+u} du \\ &= \int_1^2 \underbrace{u^{1/(n+1)}}_{\geq 0} \overbrace{\frac{1 - u^{1/n(n+1)}}{1+u}}^{\leq 0} du \leq 0 \quad (\text{car } 1 \leq 2 \text{ et } u^\alpha \geq 1 \text{ lorsque } \alpha \geq 0 \text{ et } u \geq 1) \end{aligned}$$

donc $j_{n+1} - j_n \geq 0$, ce qui implique que la suite $(j_n)_n$ est décroissante.

$\boxed{k_n}$ (intervalle commun)

$$\begin{aligned} k_{n+1} - k_n &= \int_0^1 \frac{u}{1+u^{n+1}} du - \int_0^1 \frac{u}{1+u^n} du = \int_0^1 \frac{u(1+u^n - 1 - u^{n+1})}{(1+u^n)(1+u^{n+1})} du = \int_0^1 \frac{u(u^n - u^{n+1})}{(1+u^n)(1+u^{n+1})} du \\ &= \int_0^1 \frac{\overbrace{u^{n+1}}^{\geq 0} \overbrace{(1-u)}^{\geq 0}}{\underbrace{(1+u^n)(1+u^{n+1})}_{\geq 0}} du \geq 0 \quad (\text{car } 0 \leq 1) \end{aligned}$$

donc $k_{n+1} - k_n \geq 0$, ce qui implique que la suite $(k_n)_n$ est croissante.

$\boxed{l_n}$ (fonction commune). Pour $n \geq 1$, on a

$$l_{n+1} - l_n = \int_1^{\ln(n+1)} \frac{t}{1-\exp(t)} dt - \int_1^{\ln n} \frac{t}{1-\exp(t)} dt = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{\overbrace{t}^{\geq 0}}{\underbrace{1-\exp(t)}_{\leq 0}} dt \leq 0 \quad (\text{car } n \leq n+1 \text{ et } e^t \geq e^{\ln n} = n \geq 1)$$

donc $l_{n+1} - l_n \leq 0$, ce qui implique que la suite $(l_n)_n$ est décroissante.

correction de l'exercice 6

La fonction \ln étant croissante sur $] -1, +\infty[$, on a $\forall x \in [0, +\infty[$, $0 = \ln(1+0) \leq \ln(1+x)$. Ensuite, on introduit la fonction $g(x) = \ln(1+x) - x$. Sa dérivée est donnée par $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ qui est négative sur \mathbb{R}_+ donc la fonction g est décroissante sur \mathbb{R}_+ . Puisque $g(0) = 0$, on en déduit que $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq g(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, le réel x^n est positif donc on peut remplacer le x dans l'inégalité précédente par x^n , ce qui nous donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0, 1]$, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$, l'inégalité précédente permet d'appliquer le théorème d'encadrement donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

correction de l'exercice 7

Puisque x , $x-1$ et $\sqrt{x^2-1}$ sont positifs lorsque $x \in]1, +\infty[$, on a

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} \leq x \Leftrightarrow x^2-1 \leq x^2 \Leftrightarrow -1 \leq 0$$

cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit que $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x-1 \leq \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq x^2-1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 \leq x^2-1 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \Leftrightarrow 1 \leq x$$

cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit que $\forall x \in]1, +\infty[$, $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x-1}$, ce qui montre que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leq \frac{1}{x-1}$$

Puisque $n \geq 2$, l'intervalle $[2, n]$ est inclus dans l'intervalle $]1, +\infty[$, ce qui nous autorise à intégrer l'encadrement précédent sur $[2, n]$

$$\forall n \geq 2, \quad \int_2^n \frac{dx}{x} \leq \int_2^n \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \leq \int_2^n \frac{dx}{x-1} \Leftrightarrow [\ln|x|]_{x=2}^{x=n} \leq I_n \leq [\ln|x-1|]_{x=2}^{x=n} \Leftrightarrow \ln n - \ln 2 \leq I_n \leq \ln(n-1)$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n - \ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n-1) = +\infty$, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$. Ensuite, en divisant l'encadrement précédent par $\ln n$, on a

$$1 - \frac{\ln 2}{\ln n} \leq \frac{I_n}{\ln n} \leq \frac{\ln(n-1)}{\ln n} = \frac{\ln \left[n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\ln n}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\ln 2}{\ln n} \leq \frac{I_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\ln n}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$, il est immédiat que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln 2}{\ln n} = 1$ et le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{\ln n} = 1$, ce que l'on peut encore écrire $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

correction de l'exercice 8

Monotonie de I_n : On commence par remarquer que $I_n = \int_0^1 [x(1-x)]^n dx$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 [x(1-x)]^{n+1} - [x(1-x)]^n dx = \int_0^1 [x(1-x)]^n \{x(1-x) - 1\} dx = \int_0^1 [x(1-x)]^n \{-x^2 + x - 1\} dx$$

Le trinôme $-x^2 + x - 1$ a pour discriminant $-3 < 0$ donc il est de signe constant sur \mathbb{R} , ce qui implique qu'il est de signe négatif sur \mathbb{R} donc sur $[0, 1]$. L'intégration portant sur des bornes croissantes, on a

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left[\underbrace{x(1-x)}_{\geq 0 \text{ sur } [0,1]} \right]^n \left\{ \underbrace{-x^2 + x - 1}_{\leq 0 \text{ sur } [0,1]} \right\} dx \leq 0$$

donc la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

Encadrement simple de I_n :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \begin{cases} 0 \leq x^n \leq 1 \\ 0 \leq 1-x \leq 1 \\ 0 \leq (1-x)^n \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq x^n(1-x)^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n(1-x)^n dx \leq \int_0^1 dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq 1.$$

Convergence de I_n : La suite $(I_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$: La fonction $x \mapsto x - x^2$ est dérivable sur $[0, 1]$ et $(x - x^2)' = 1 - 2x$ donc

x	0		1/2		1
$1 - 2x$			0		
$x - x^2$	0	↗	1/4	↘	0

Par conséquent, on en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq [x(1-x)]^n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 [x(1-x)]^n dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^n dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

correction de l'exercice 9

Calcul de I_1 : $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$. Il est immédiat que $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ donc

$$I_1 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = [x - \ln |1+x|]_{x=0}^{x=1} = 1 - \ln 2$$

$$\boxed{\text{Calcul de } I_2} : I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \ln 2$$

$\boxed{\text{Signe de } I_n}$: La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^n}$ est positive sur $[0, 1]$ et l'intégrale portant sur des bornes croissantes, on en déduit

que $\int_0^1 \frac{x}{1+x^n} dx = I_n$ est positive.

$\boxed{\text{Encadrement de } I_n}$:

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq x^n \leq 1 \\ 1 \leq 1+x^n \leq 2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \end{array} \right. \Rightarrow \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq \frac{x}{1+x^n} \leq 1^2 = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 1 dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq 1.$$

$\boxed{\text{Monotonie de } (I_n)}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} dx = \int_0^1 x \left[\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} \right] dx = \int_0^1 x \left[\frac{1+x^n - (1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \right] dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \right] dx = \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_{\geq 0 \text{ sur } [0,1]} \left[\frac{\overbrace{1-x}^{\geq 0 \text{ sur } [0,1]}}{\underbrace{(1+x^{n+1})(1+x^n)}_{\geq 0 \text{ sur } [0,1]}} \right] dx \geq 0 \quad (0 \leq 1)$$

donc la suite $(I_n)_n$ est croissante.

$\boxed{\text{Convergence de } (I_n)}$: La suite $(I_n)_n$ est croissante et majorée par 1 donc elle converge.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x(1-x^n) dx \leq I_n \leq \int_0^1 x dx$ L'intégration portant sur le même intervalle et l'intégration portant sur des bornes

croissantes, il suffit de montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad x(1-x^n) \leq \frac{x}{1+x^n} \leq x$.

$$x(1-x^n) - \frac{x}{1+x^n} = \frac{x(1-x^n)(1+x^n) - x}{1+x^n} = \underbrace{x}_{\geq 0 \text{ sur } [0,1]} \frac{\overbrace{(1-x^{2n}) - 1}^{\leq 0 \text{ sur } [0,1] \text{ car } -x^n \leq 0}}{\underbrace{1+x^n}_{\geq 0 \text{ sur } [0,1]}} \leq 0 \Leftrightarrow x(1-x^n) \leq \frac{x}{1+x^n} \text{ sur } [0, 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{1+x^n} \leq x \text{ sur } [0, 1]$$

ce qui démontre l'encadrement. En intégrant sur $[0, 1]$ (les bornes étant dans l'ordre croissant), on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 x(1-x^n) dx \leq I_n \leq \int_0^1 x dx$$

$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n}$: L'encadrement précédent combiné à un calcul direct nous donne

$$\int_0^1 x(1-x^n) dx = \int_0^1 (x - x^{n+1}) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}$.