correction de l'exercice 1

1. Le nombre de "Pile" s'appelle X, pour chaque "Pile", le joueur gagne 2 euros donc l'obtention de X "Pile" fait gagner $2\times X$ euros au joueur et étant donné qu'il paie 3 euros (donc il les perd définitivement), le gain du joueur est $Y = 2X-3$.

2. Il est évident que $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,3]\!],\quad P(X=k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \frac{\binom{3}{k}}{2^3} = \frac{\binom{3}{k}}{8}$$

ce que l'on peut aussi écrire $P(X=0) = \frac{1}{8},\quad P(X=1) = \frac{3}{8},\quad P(X=2) = \frac{3}{8},\quad P(X=3) = \frac{1}{8}$

Justification du calcul de probabilité : *L'évènement $X = k$ signifie que le joueur a obtenu k "Pile". On choisit k dés parmi les 3 ($\binom{3}{k}$ choix possibles), la probabilité que ces k dés donnent "Pile" est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et la probabilité que les $3-k$ autres donnent Face est $\left(1-\frac{1}{2}\right)^k$*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{3} kP(X=k) = \frac{\binom{3}{1}}{8} + 2\times\frac{\binom{3}{2}}{8} + 3\times\frac{\binom{3}{3}}{8} = \frac{3}{2} \\ E(X^2) &= \sum_{k=0}^{3} k^2P(X=k) = \frac{\binom{3}{1}}{8} + 2^2\times\frac{\binom{3}{2}}{8} + 3^2\times\frac{\binom{3}{3}}{8} = 3 \qquad V(X) = E(X^2)-(E(X))^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3. Puisque Y est une fonction affine de X (i.e. Y est de la forme $Y = aX+b$), on a immédiatement

$$E(Y) = E(2X-3) = 2E(X)-3 = 0 \quad \text{et} \quad V(Y) = V(2X-3) = 2^2V(X) = 3$$

En moyenne, le joueur n'est ni perdant, ni gagnant.

4. Le tableau

X	0	1	2	3
$Y = 2X-3$	-3	-1	1	3

montre que $Y(\Omega) = \{-3,-1,1,3\}$.Ensuite, on a

$$\begin{aligned} P(Y=-3) &= P(2X-3=-3) = P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}}{8} = \frac{1}{8} \qquad P(Y=-1) = P(2X-3=-1) = P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}}{8} = \frac{3}{8} \\ P(Y=1) &= P(2X-3=1) = P(X=2) = \frac{3}{8} \qquad P(Y=3) = P(2X-3=3) = P(X=3) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 2

1. Bien entendu, puisque les pioches sont sans remise, on peut piocher 5 rois donc $X(\Omega) = [\![0,4]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,4]\!],\quad P(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{28}{5-k}}{\binom{32}{5}}$$

ou sous une forme plus explicite

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{\binom{4}{0}\binom{28}{5-0}}{\binom{32}{5}} = \frac{1755}{3596},\quad P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{5-1}}{\binom{32}{5}} = \frac{2925}{7192},\quad P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{5-2}}{\binom{32}{5}} = \frac{351}{3596} \\ P(X=3) &= \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{5-3}}{\binom{32}{5}} = \frac{27}{3596} \quad P(X=4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{5-4}}{\binom{32}{5}} = \frac{1}{7192} \end{aligned}$$

Justification du calcul de probabilité : *L'évènement $X = k$ signifie que l'on a pioché k rois. Pour les cas favorables, on choisit k cartes parmi les 4 rois disponibles ($\binom{4}{k}$ choix) et les $5-k$ autres cartes parmi les $32-4 = 28$ cartes qui ne sont pas des rois ($\binom{28}{5-k}$ choix) et pour les cas possibles, on choisit 5 cartes parmi les 32 disponibles.*
Un calcul direct fournit l'espérance de X

$$E(X) = \sum_{k=0}^{4} kP(X=k) = \frac{2925}{7192} + 2\times\frac{351}{3596} + 3\times\frac{27}{3596} + 4\times\frac{1}{7192} = \frac{5}{8}$$

2. (a) Le nombre de rois obtenus est égal à X. Etant donné que chaque roi apporte a euros, les X rois apportent aX rois et le joueur doit payer 2 euros (donc il les perd définitivement) donc le gain G_X du joueur est égal à $G_X = aX-2$. La variable G_X étant une expression affine en X (i.e. de la forme $aX+b$), le cours nous donne directement

$$E(G_X) = E(aX-2) = aE(X)-2 = \frac{5a}{8} - 2$$

(b) Le jeu est favorable au joueur en moyenne si

$$E(G_X) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{5a}{8} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{5a}{8} \geqslant 2 \Leftrightarrow a \geqslant \frac{16}{5} = 3,2$$

Par conséquent, le jeu est favorable au joueur en moyenne si et seulement chaque roi rapporte au moins 3,2 euros.

(c) Le tableau ci-contre

X	0	1	2	3	4
G_X	-2	$a-2$	$2a-2$	$3a-2$	$4a-2$

montre que

$$G_X(\Omega) = \{-2, a-2, 2a-2, 3a-2, 4a-2\} = \{ak-2, \quad k \in [\![0,4]\!]$$

Ensuite, puisque a est non nul, on a

$$P(G_X = ak-2) = P(aX-2 = ak-2) = P(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{28}{5-k}}{\binom{32}{5}}$$

ou encore, sous une forme plus explicite,

$$\begin{aligned}
P\left(G_X = -2\right) &= P(aX-2=-2) = P(X=0) = \frac{1755}{3596} \\
P\left(G_X = a-2\right) &= P(aX-2=a-2) = P(X=1) = \frac{2925}{7192} \\
P\left(G_X = 2a-2\right) &= P(aX-2=2a-2) = P(X=2) = \frac{351}{3596} \\
P\left(G_X = 3a-2\right) &= P(aX-2=3a-2) = P(X=3) = \frac{27}{3596} \\
P\left(G_X = 4a-2\right) &= P(aX-2=4a-2) = P(X=4) = \frac{1}{7192}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 3

1. Il est évident que $X_1(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $P(X_1=0) = \frac{1}{6}$, $\quad P(X_1=1) = \frac{2}{6}$, $\quad P(X_1=2) = \frac{3}{6}$.
   Je laisse le lecteur vérifier que $E(X_1) = \frac{4}{3}$, $E(X_1^2) = \frac{7}{3}$ et $V(X_1) = \frac{5}{9}$

2. De même, on a $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $P(X_2=0) = \frac{3}{6}$, $\quad P(X_2=1) = \frac{2}{6}$, $\quad P(X_2=2) = \frac{1}{6}$.
   Je laisse le lecteur vérifier que $E(X_2) = \frac{2}{3}$, $E(X_2^2) = 1$ et $V(X_2) = \frac{5}{9}$

3. (a) Par linéarité de l'espérance, on a

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(X_1+X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \\
E(T) &= E(X_1-X_2) = E(X_1) - E(X_2) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(b) Les tableaux suivants nous donnent l'univers de chaque variable

$Z = X_1 + X_2$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$
$X_1 = 0$	0	1	2
$X_1 = 1$	1	2	3
$X_1 = 2$	2	3	4

$T = X_1 - X_2$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$
$X_1 = 0$	0	-1	-2
$X_1 = 1$	1	0	-1
$X_1 = 2$	2	1	0

$R = X_1X_2$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$
$X_1 = 0$	0	0	0
$X_1 = 1$	0	1	2
$X_1 = 2$	0	2	4

donc $Z(\Omega) = [\![0,4]\!]$, $\quad T(\Omega) = [\![-2,2]\!]$, $\quad R(\Omega) = \{0,1,2,4\}$.

Etant donné que les résultats des dés soient indépendants, les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et les calculs suivants donnent la loi de chacune des variables.

Loi de Z :

$$\begin{aligned}
P\left(Z=0\right) &= P(X_1=0 \cap X_2=0) = P(X_1=0)P(X_2=0) = \frac{3}{36} \\
P\left(Z=1\right) &= P(X_1=0 \cap X_2=1) + P(X_1=1 \cap X_2=0) \\
&= P(X_1=0)P(X_2=1) + P(X_1=1)P(X_2=0) = \frac{8}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Z=2) &= P(X_1=2\cap X_2=0)+P(X_1=1\cap X_2=1)+P(X_1=0\cap X_2=2)\\
&= P(X_1=2)P(X_2=0)+P(X_1=1)P(X_2=1)+P(X_1=0)P(X_2=2)=\frac{14}{36}\\
P(Z=3) &= P(X_1=1\cap X_2=2)+P(X_1=2\cap X_2=1)\\
&= P(X_1=1)P(X_2=2)+P(X_1=2)P(X_2=1)=\frac{8}{36}\\
P(Z=4) &= P(X_1=2\cap X_2=2)=P(X_1=2)P(X_2=2)=\frac{3}{36}
\end{aligned}$$

Loi de T :

$$\begin{aligned}
P(T=-2) &= P(X_1=0\cap X_2=2)=P(X_1=0)P(X_2=2)=\frac{1}{36}\\
P(T=-1) &= P(X_1=0\cap X_2=1)+P(X_1=1\cap X_2=2)=P(X_1=0)P(X_2=1)+P(X_1=1)P(X_2=2)=\frac{4}{36}\\
P(T=0) &= P(X_1=0\cap X_2=0)+P(X_1=1\cap X_2=1)+P(X_1=2\cap X_2=2)\\
&= P(X_1=0)P(X_2=0)+P(X_1=1)P(X_2=1)+P(X_1=2)P(X_2=2)=\frac{10}{36}\\
P(T=1) &= P(X_1=1\cap X_2=0)+P(X_1=2\cap X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=0)+P(X_1=2)P(X_2=1)=\frac{12}{36}\\
P(T=2) &= P(X_1=2\cap X_2=0)=P(X_1=2)P(X_2=0)=\frac{9}{36}
\end{aligned}$$

Loi de R :

$$\begin{aligned}
P(R=0) &= P(X_1=0\cap X_2=0)+P(X_1=0\cap X_2=1)+P(X_1=0\cap X_2=2)+P(X_1=1\cap X_2=0)\\
&\quad +P(X_1=2\cap X_2=0)\\
&= P(X_1=0)P(X_2=0)+P(X_1=0)P(X_2=1)+P(X_1=0)P(X_2=2)+P(X_1=1)P(X_2=0)\\
&\quad +P(X_1=2)P(X_2=0)=\frac{21}{36}\\
P(R=1) &= P(X_1=1\cap X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=1)=\frac{4}{36}\\
P(R=2) &= P(X_1=1\cap X_2=2)+P(X_1=2\cap X_2=1)=P(X_1=1)P(X_2=2)+P(X_1=2)P(X_2=1)=\frac{8}{36}\\
P(R=4) &= P(X_1=2\cap X_2=2)=P(X_1=2)P(X_2=2)=\frac{3}{36}
\end{aligned}$$

En résumé, on a

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= \frac{3}{36}\quad P(Z=1)=\frac{8}{36}\quad P(Z=2)=\frac{14}{36}\quad P(Z=3)=\frac{8}{36}\quad P(Z=4)=\frac{3}{36}\\
P(T=-2) &= \frac{1}{36}\quad P(T=-1)=\frac{4}{36}\quad P(T=0)=\frac{10}{36}\quad P(T=1)=\frac{12}{36}\quad P(T=2)=\frac{9}{36}\\
P(R=0) &= \frac{21}{36}\quad P(R=1)=\frac{4}{36}\quad P(R=2)=\frac{8}{36}\quad P(R=4)=\frac{3}{36}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 4

1. Loi de X_1 : $X_1(\Omega)=\{0,1\}$. L'obtention de la première boule dépend de l'urne choisie (et au premier tirage, elle est aléatoire) donc, en utilisant le système complet d'évènements (U_1,U_2), on a :

$$\begin{aligned}
P(X_1=0) &= P(U_1\cap(X_1=0))+P(U_2\cap(X_1=0))=P(U_1)P_{U_1}(X_1=0)+P(U_2)P_{U_2}(X_1=0)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{n_1}{b_1+n_1}+\frac{1}{2}\times\frac{n_2}{b_2+n_2}=\frac{b_1n_2+b_2n_1+2n_1n_2}{2(b_1+n_1)(b_2+n_2)}\\
P(X_1=1) &= P(U_1\cap(X_1=1))+P(U_2\cap(X_1=1))=P(U_1)P_{U_1}(X_1=1)+P(U_2)P_{U_2}(X_1=1)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{b_1}{b_1+n_1}+\frac{1}{2}\times\frac{b_2}{b_2+n_2}=\frac{2b_1b_2+b_1n_2+b_2n_1}{2(b_1+n_1)(b_2+n_2)}
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :

Puisque l'on choisit au hasard (donc avec équiprobabilité) l'une des deux urnes, il est évident que $P(U_1)=P(U_2)=\dfrac{1}{2}$.

$P_{U_1}(X_1=0)$: *On pioche dans l'urne* U_1 *et l'on souhaite ne pas obtenir une boule blanche, c'est-à-dire que l'on pioche une boule noire. L'urne* U_1 *contenant* n_1 *boules noires et* b_1+n_1 *boules au total donc la probabilité de piocher une boule noire est égale à* $\dfrac{n_1}{b_1+n_1}$.

$P_{U_2}(X_1=0)$: *On pioche dans l'urne* U_2 *et l'on souhaite ne pas obtenir une boule blanche, c'est-à-dire que l'on pioche* *une boule noire. L'urne U_2 contenant n_2 boules noires et b_2+n_2 boules au total donc la probabilité de piocher une boule noire est égale à* $\dfrac{n_2}{b_2+n_2}$.

$\underline{P_{U_1}(X_1=1)}$ *: On pioche dans l'urne U_1 et l'on souhaite obtenir une boule blanche. L'urne U_1 contenant b_1 boules blanches et b_1+n_1 boules au total donc la probabilité de piocher une boule blanche est égale à* $\dfrac{b_1}{b_1+n_1}$.

$\underline{P_{U_2}(X_1=1)}$ *: On pioche dans l'urne U_1 et l'on souhaite obtenir une boule blanche. L'urne U_2 contenant b_2 boules blanches et b_2+n_2 boules au total donc la probabilité de piocher une boule blanche est égale à* $\dfrac{b_2}{b_2+n_2}$.

Loi de X_2 : Par construction, on a $X_1(\Omega)=\{0,1\}$.
La variable X_2 représente le fait que l'on a pioché une boule blanche ou non au second tirage. Or le choix de l'urne dans laquelle on pioche dépend de l'obtention ou non d'une boule blanche au premier tirage, c'est-à-dire des évènements $(X_1=0)$ et $(X_1=1)$. On introduit naturellement le système complet d'évènements $(X_1=0)$, $(X_1=1)$ pour calculer $P(X_2=0)$ et $P(X_2=1)$

$$\begin{aligned}
P\left(X_2=0\right) &= P(X_1=0\cap X_2=0)+P(X_1=1\cap X_2=0)\\
&= P(X_1=0)P_{(X_1=0)}(X_2=0)+P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=0)\\
&= \frac{n_1(b_2+n_2)+n_2(b_1+n_1)}{2(b_1+n_1)(b_2+n_2)}\times\frac{n_2}{b_2+n_2}+\frac{b_1(b_2+n_2)+b_2(b_1+n_1)}{2(b_1+n_1)(b_2+n_2)}\times\frac{n_1}{b_1+n_1}\\
P\left(X_2=1\right) &= P(X_1=0\cap X_2=1)+P(X_1=1\cap X_2=1)\\
&= P(X_1=0)P_{(X_1=0)}(X_2=1)+P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=1)\\
&= \frac{n_1(b_2+n_2)+n_2(b_1+n_1)}{2(b_1+n_1)(b_2+n_2)}\times\frac{b_2}{b_2+n_2}+\frac{b_1(b_2+n_2)+b_2(b_1+n_1)}{2(b_1+n_1)(b_2+n_2)}\times\frac{b_1}{b_1+n_1}
\end{aligned}$$

On ne peut guère plus simplifier les calculs.
Justification des calculs de probabilités conditionnelles :

$\underline{P_{(X_1=0)}(X_2=0)}$ *: L'évènement $(X_1=0)$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule noire au premier tirage donc le second tirage s'effectue dans l'urne U_2. On souhaite la réalisation de l'évènement $(X_2=0)$, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule noire au second tirage, qui s'effectue dans l'urne U_2. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{n_2}{b_2+n_2}$.

$\underline{P_{(X_1=1)}(X_2=0)}$ *: L'évènement $(X_1=1)$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule blanche au premier tirage donc le second tirage s'effectue dans l'urne U_1. On souhaite la réalisation de l'évènement $(X_2=0)$, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule noire au second tirage, qui s'effectue dans l'urne U_1. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{n_1}{b_1+n_1}$.

$\underline{P_{(X_1=0)}(X_2=1)}$ *: L'évènement $(X_1=0)$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule noire au premier tirage donc le second tirage s'effectue dans l'urne U_2. On souhaite la réalisation de l'évènement $(X_2=1)$, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule blanche au second tirage, qui s'effectue dans l'urne U_2. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{b_2}{b_2+n_2}$.

$\underline{P_{(X_1=1)}(X_2=1)}$ *: L'évènement $(X_1=1)$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule blanche au premier tirage donc le second tirage s'effectue dans l'urne U_1. On souhaite la réalisation de l'évènement $(X_2=1)$, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule blanche au second tirage, qui s'effectue dans l'urne U_1. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{b_1}{b_1+n_1}$.

2. Les évènements $(X_{i+1}=0)$ et $(X_{i+1}=1)$ correspondent au fait que l'on pioche une boule noire ou une boule blanche au $(i+1)$-ième tirage, ces pioches dépendant bien entendu du fait que l'on pioche dans l'urne U_1 ou U_2. Le choix de l'urne dépend de la pioche d'une boule blanche ou d'une boule noire au i-ième tirage, c'est-à-dire des évènements $(X_i=0)$ et $(X_i=1)$. Pour les calculs demandés, on introduit par conséquent, le système complet d'évènements $(X_i=0)$ et $(X_i=1)$

Calcul de $P(X_{i+1}=0)$ en fonction de $P(X_i=0)$ et $P(X_i=1)$:

$$\begin{aligned}
P\left(X_{i+1}=0\right) &= P(X_i=0\cap X_{i+1}=0)+P(X_i=1\cap X_{i+1}=0)\\
&= P(X_i=0)P_{(X_i=0)}(X_{i+1}=0)+P(X_i=1)P_{(X_i=1)}(X_{i+1}=0)\\
&= P(X_i=0)\times\frac{n_2}{b_2+n_2}+P(X_i=1)\times\frac{n_1}{b_1+n_1}\\
P\left(X_{i+1}=1\right) &= P(X_i=0\cap X_{i+1}=1)+P(X_i=1\cap X_{i+1}=1)\\
&= P(X_i=0)P_{(X_i=0)}(X_{i+1}=1)+P(X_i=1)P_{(X_i=1)}(X_{i+1}=1)\\
&= P(X_i=0)\times\frac{b_2}{b_2+n_2}+P(X_i=1)\times\frac{b_1}{b_1+n_1}
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités conditionnelles :
$P_{(X_i=0)}(X_{i+1}=0)$: *L'évènement* $(X_i=0)$ *est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule noire au i-ième tirage donc le* $(i+1)$*-ème tirage s'effectue dans l'urne* U_2*. On souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{i+1}=0)$*, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule noire au* $(i+1)$*-ème tirage, qui s'effectue dans l'urne* U_2*. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{n_2}{b_2+n_2}$.
$P_{(X_i=1)}(X_{i+1}=0)$: *L'évènement* $(X_i=1)$ *est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule blanche au i-ième tirage donc le* $(i+1)$*-ème tirage s'effectue dans l'urne* U_1*. On souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{i+1}=0)$*, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule noire au* $(i+1)$*-ème tirage, qui s'effectue dans l'urne* U_1*. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{n_1}{b_1+n_1}$.
$P_{(X_i=0)}(X_{i+1}=1)$: *L'évènement* $(X_i=0)$ *est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule noire au i-ième tirage donc le* $(i+1)$*-ème tirage s'effectue dans l'urne* U_2*. On souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{i+1}=1)$*, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule blanche au* $(i+1)$*-ème tirage, qui s'effectue dans l'urne* U_2*. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{b_2}{b_2+n_2}$.
$P_{(X_i=1)}(X_{i+1}=1)$: *L'évènement* $(X_i=1)$ *est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule blanche au i-ième tirage donc le* $(i+1)$*-ème tirage s'effectue dans l'urne* U_1*. On souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_{i+1}=1)$*, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule blanche au* $(i+1)$*-ème tirage, qui s'effectue dans l'urne* U_1*. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{b_1}{b_1+n_1}$.

3. Les évènements $(X_i=0)$ et $(X_i=1)$ formant un système complet d'évènements donc
$$P(X_i=0)+P(X_i=1)=1 \Leftrightarrow P(X_i=1)=1-P(X_i=0)$$
L'expression de $P(X_{i+1}=0)$ en fonction de $P(X_i=0)$ et $P(X_i=1)$ obtenue à la question 2 nous donne
$$P(X_{i+1}=0)=P(X_i=0)\times\frac{7}{19}+(1-P(X_i=0))\times\frac{5}{15}=\left(\frac{7}{19}-\frac{1}{3}\right)P(X_i=0)+\frac{1}{3}=\frac{2}{57}P(X_i=0)+\frac{1}{3}$$
donc la suite $(P(X_i=0))_{i\in\mathbb{N}}$ est bien une suite arithmético-géométrique.
Explicitation de $P(X_i=0)$: Détermination de la constante L
$$L=\frac{2}{57}L+\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{55}{57}L=\frac{1}{3}\Leftrightarrow L=\frac{57}{3\times 55}=\frac{19}{55}$$
Par conséquent, la suite $u_i=P(X_i=0)-\dfrac{19}{55}$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{57}$ (revoir les nombreuses explicitations des suites arithmético-géométriques) et, en utilisant la question 1, on a donc
$$\forall i\in\mathbb{N}^{\times},\quad u_i=\left(\frac{2}{57}\right)^i u_0\Leftrightarrow P(X_i=0)-\frac{19}{55}=\left(\frac{2}{57}\right)^{i-1}\left(P(X_1=0)-\frac{19}{55}\right)\Leftrightarrow P(X_i=0)=\frac{19}{55}+\frac{17}{3135}\left(\frac{2}{57}\right)^{i-1}$$
On exprime u_i *en fonction de* u_1 *car la probabilité* $P(X_0=0)$ *n'a pas de sens.*
Explicitation de $P(X_i=1)$: $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=\dfrac{36}{55}-\dfrac{17}{3135}\left(\dfrac{2}{57}\right)^{i-1}$

4. Puisque $\dfrac{2}{57}\in]0,1[$, on a $\lim\limits_{i\to+\infty}P(X_i=0)=\dfrac{19}{55}$ et $\lim\limits_{i\to+\infty}P(X_i=1)=\dfrac{36}{55}$
Interprétation : après un nombre suffisamment grand nombre de tirages, la probabilité de piocher une boule blanche est très proche de $\dfrac{36}{55}$ et la probabilité de piocher une boule noire est proche de $\dfrac{19}{55}$

correction de l'exercice 5

1. Nous allons donner les différents contenus des deux urnes à chaque lancer

initialement	après 1 lancer	après 2 lancers	après 3 lancers	après 4 lancers	après 5 lancers
U_1 : 1,2	U_1 : 2	U_1 : 2,3	U_1 : 3	U_1 :	U_1 : 5
U_2 : 3,4,5,6	U_2 : 1,3,4,5,6	U_2 : 1,4,5,6	U_2 : 1,2,4,5,6	U_2 : 1,2,3,4,5,6	U_2 : 1,2,3,4,6

donc l'urne U_1 contient uniquement la boule n° 5 à l'issue du cinquième échange

2. Après le premier changement, l'urne U_1 contient soit une boule supplémentaire (si le dé a donné un numéro présent dans l'urne U_2), soit une boule en moins (si le dé a donné un numéro présent dans l'urne U_1). Par conséquent, l'urne U_1 contenant initalement 2 boules, après un échange l'urne U_1 contient 1 ou 3 boules donc $X_1(\Omega) = \{1, 3\}$. L'évolution du contenu de l'urne U_1 dépendant clairement du numéro obtenu avec le dé, on introduit le système complet d'évènements D_i, où l'évènement D_i est défini par

$$\boxed{D_i : \text{" le dé fournit le numéro } i \text{ "}}$$

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 1) &= P(D_1 \cap X_1 = 1) + P(D_2 \cap X_1 = 1) + \underbrace{P(D_3 \cap X_1 = 1)}_{=0} + \underbrace{P(D_4 \cap X_1 = 1)}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{P(D_5 \cap X_1 = 1)}_{=0} + \underbrace{P(D_6 \cap X_1 = 1)}_{=0} \\
&= P(D_1)P_{D_1}(X_1 = 1) + P(D_2)P_{D_2}(X_1 = 1) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{3} \\
P(X_1 = 3) &= \underbrace{P(D_1 \cap X_1 = 3)}_{=0} + \underbrace{P(D_2 \cap X_1 = 3)}_{=0} + P(D_3 \cap X_1 = 3) + P(D_4 \cap X_1 = 3) \\
&\quad + P(D_5 \cap X_1 = 3) + P(D_6 \cap X_1 = 3) \\
&= P(D_3)P_{D_3}(X_1 = 3) + P(D_4)P_{D_4}(X_1 = 3) + P(D_5)P_{D_5}(X_1 = 3) + P(D_6)P_{D_6}(X_1 = 3) \\
&= \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :
$\underline{P(D_3 \cap X_1 = 1)}$: *L'évènement $D_3 \cap X_1 = 1$ est impossible car il signifie que le dé a fourni le numéro 3, donc la boule numéro 3 qui était présent dans l'urne U_2 est déplacé dans l'urne U_1, ce qui implique qu'à l'issue du premier changement l'urne U_1 contient les boules numéro 1,2,3 donc trois boules, ce qui contredit la réalisation de l'évènement $X_1 = 1$.*
$\underline{P_{D_1}(X_1 = 1)}$: *l'évènement D_1 est réalisé, c'est-à-dire que le dé a fourni le numéro 1, donc la boule numéro 1 quitte l'urne U_1 et à l'issue du premier changement l'urne U_1 contient uniquement la boule numéro 2 donc une boule. Par conséquent, l'évènement $X_1 = 1$ se réalise nécesssairement, ce qui implique que $P_{D_1}(X_1 = 1) = 1$.*

Il est alors immédiat que $E(X_1) = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$.

3. Comme précédemment, après le premier changement, l'urne U_1 contient soit une boule supplémentaire (si le dé a donné un numéro présent dans l'urne U_2), soit une boule en moins (si le dé a donné un numéro présent dans l'urne U_1). Par conséquent, l'urne U_1, qui contient après 1 changement soit 1 boule, soit 3 boules, contient après le deuxième changement 0 boule ou 2 boules ou 2 boules ou 4 boules donc $X_2(\Omega) = \{0, 2, 4\}$.
Le contenu de l'urne U_1 après deux changements dépend à la fois du résultat du lancer du dé et du contenu de l'urne U_1 après un changement. Bien entendu, on doit connaitre préalablement le contenu de l'urne U_1 après un changement (le dé n'étant lancé qu'après), on considère le système complet d'évènements $(X_1 = 1)$ et $(X_1 = 3)$ qui décrit justement ce contenu.

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + \underbrace{P(X_1 = 3 \cap X_2 = 0)}_{=0} = P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \\
P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 2) + P(X_1 = 3 \cap X_2 = 2) \\
&= P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 2) + P(X_1 = 3)P_{(X_1=3)}(X_2 = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{11}{18} \\
P(X_2 = 4) &= \underbrace{P(X_1 = 1 \cap X_2 = 4)}_{=0} + P(X_1 = 3 \cap X_2 = 4) = P(X_1 = 3)P_{(X_1=3)}(X_2 = 4) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{18}
\end{aligned}$$

Vérification : $P(X_2 = 0) + P(X_2 = 2) + P(X_2 = 4) = 1$
Justification des calculs de probabilités :
$\underline{P_{(X_1=1)}(X_2 = 0)}$: *L'évènement $(X_1 = 1)$ est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_2 = 0)$, c'est-à-dire que l'urne U_1 contient après un échange 1 boule (donc l'urne U_2 en contient 5) et l'on souhaite qu'à l'issue du deuxième échange l'urne U_1 contienne 0 boule. Cela n'est possible que si le dé fourni le numéro de la boule contenue dans l'urne U_1 (afin de déplacer dans l'urne U_2 la boule correspondante). Etant donné qu'il y a 6 numéros possibles et 1 seul est favorable, la probabilité de réalisation vaut $\frac{1}{6}$.*
$\underline{P(X_1 = 3 \cap X_2 = 0)}$: *L'évènement $(X_1 = 3)$ signifie que l'urne U_1 contient 3 boules après un échange et l'évènement $(X_2 = 0)$ signifie que l'urne U_1 contient 0 boule au deuxième échange (l'échange suivant). La réalisation de l'évènement*

$(X_1 = 3)$ implique nécessairement qu'à l'échange suivant l'urne U_1 contient 2 ou 4 boules, ce qui contredit la réalisation de l'évènement $(X_2 = 0)$ donc $P(X_1 = 3 \cap X_2 = 0) = 0$

$\underline{P_{(X_1=1)}(X_2 = 2)}$: L'évènement $(X_1 = 1)$ est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_2 = 2)$, c'est-à-dire que l'urne U_1 contient après un échange 1 boule (donc l'urne U_2 en contient 5) et l'on souhaite qu'à l'issue du deuxième échange l'urne U_1 contienne 2 boules. Cela n'est possible que si le dé fourni le numéro d'une boule contenue dans l'urne U_2 (afin de déplacer dans l'urne U_1 la boule correspondante). Etant donné qu'il y a 6 numéros possibles et 5 numéros sont favorables, la probabilité de réalisation vaut $\frac{5}{6}$.

$\underline{P_{(X_1=3)}(X_2 = 2)}$: L'évènement $(X_1 = 3)$ est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_2 = 2)$, c'est-à-dire que l'urne U_1 contient après un échange 3 boules (donc l'urne U_2 en contient 3) et l'on souhaite qu'à l'issue du deuxième échange l'urne U_1 contienne 2 boules. Cela n'est possible que si le dé fourni le numéro d'une boule contenue dans l'urne U_1 (afin de déplacer dans l'urne U_2 la boule correspondante). Etant donné qu'il y a 6 numéros possibles et 3 numéros sont favorables, la probabilité de réalisation vaut $\frac{3}{6}$.

$\underline{P(X_1 = 1 \cap X_2 = 4)}$: L'évènement $(X_1 = 1)$ signifie que l'urne U_1 contient 1 boule après un échange et l'évènement $(X_2 = 4)$ signifie que l'urne U_1 contient 4 boules au deuxième échange (l'échange suivant). La réalisation de l'évènement $(X_1 = 1)$ implique nécessairement qu'à l'échange suivant l'urne U_1 contient 0 ou 2 boules, ce qui contredit la réalisation de l'évènement $(X_2 = 4)$ donc $P(X_1 = 1 \cap X_2 = 4) = 0$

$\underline{P_{(X_1=3)}(X_2 = 4)}$: L'évènement $(X_1 = 3)$ est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_2 = 4)$, c'est-à-dire que l'urne U_1 contient après un échange 3 boules (donc l'urne U_2 en contient 3) et l'on souhaite qu'à l'issue du deuxième échange l'urne U_1 contienne 4 boules. Cela n'est possible que si le dé fourni le numéro d'une boule contenue dans l'urne U_2 (afin de déplacer dans l'urne U_1 la boule correspondante). Etant donné qu'il y a 6 numéros possibles et 3 numéros sont favorables, la probabilité de réalisation vaut $\frac{3}{6}$.

4. En général, le nombre de boules dans l'urne U_1 prend toutes les valeurs entre 0 et 6 donc $X_n(\Omega) = [\![0, 6]\!]$ (même si pour des valeurs particulières de n, la variable X_n ne prend pas toutes les valeurs entre 0 et 6)

5. Le contenu de l'urne U_1 après $n+1$ changements dépend à la fois du résultat du lancer du dé et du contenu de l'urne U_1 après n changement. Bien entendu, on doit connaitre préalablement le contenu de l'urne U_1 après n changement (le dé n'étant lancé qu'après), on considère le système complet d'évènements $(X_1 = k)_{k\in[\![0,6]\!]}$ qui décrit justement ce contenu.

$$\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=0\right) &= \underbrace{P\left(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 0\right)}_{=0} + P\left(X_n = 1 \cap X_{n+1} = 0\right) \\
&\quad + \underbrace{P\left(X_n = 2 \cap X_{n+1} = 0\right) + \cdots + P\left(X_n = 6 \cap X_{n+1} = 0\right)}_{=0} \\
&= P\left(X_n = 1\right) P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1} = 0\right) = \frac{1}{6} P(X_n = 1) \\
P\left(X_{n+1}=1\right) &= P\left(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 1\right) + \underbrace{P\left(X_n = 1 \cap X_{n+1} = 1\right)}_{=0} + P\left(X_n = 2 \cap X_{n+1} = 1\right) \\
&\quad + \underbrace{P\left(X_n = 3 \cap X_{n+1} = 1\right) \cdots + P\left(X_n = 6 \cap X_{n+1} = 1\right)}_{=0} \\
&= P(X_n = 0) P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2) P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{6}{6} P(X_n = 0) + \frac{2}{6} P(X_n = 2) \\
P\left(X_{n+1}=2\right) &= \underbrace{P(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 2)}_{=0} + P(X_n = 1 \cap X_{n+1} = 2) + \underbrace{P(X_n = 2 \cap X_{n+1} = 2)}_{=0} \\
&\quad + P\left(X_n = 3 \cap X_{n+1} = 2\right) + \underbrace{P\left(X_n = 4 \cap X_{n+1} = 2\right) + \cdots + P\left(X_n = 6 \cap X_{n+1} = 2\right)}_{=0} \\
&= P(X_n = 1) P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 3) P_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 2) = \frac{5}{6} P(X_n = 1) + \frac{3}{6} P(X_n = 3) \\
P\left(X_{n+1}=3\right) &= \underbrace{P(X_n = 0 \cap X_{n+1} = 3) + P(X_n = 1 \cap X_{n+1} = 3)}_{=0} + P(X_n = 2 \cap X_{n+1} = 3) \\
&\quad + \underbrace{P\left(X_n = 3 \cap X_{n+1} = 3\right)}_{=0} + P\left(X_n = 4 \cap X_{n+1} = 3\right) + \underbrace{P\left(X_n = 5 \cap X_{n+1} = 3\right) + P\left(X_n = 6 \cap X_{n+1} = 3\right)}_{=0}
\end{aligned}$$

$$P\left(X_{n+1}=3\right) = P(X_n = 2) P_{(X_n=2)} P(X_{n+1} = 3) + P\left(X_n = 4) P_{(X_n=4)} P(X_{n+1} = 3\right) = \frac{4}{6} P(X_n = 2) + \frac{4}{6} P(X_n = 4)$$

$$\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=4\right) &= \underbrace{P(X_n=0\cap X_{n+1}=4)+\cdots+P(X_n=2\cap X_{n+1}=4)}_{=0}+P(X_n=3\cap X_{n+1}=4)\\
&\quad+\underbrace{P\left(X_n=4\cap X_{n+1}=4\right)}_{=0}+P\left(X_n=5\cap X_{n+1}=4\right)+\underbrace{P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=4\right)}_{=0}\\
&= P(X_n=3)P_{(X_n=3)}P(X_{n+1}=4)+P\left(X_n=5)P_{(X_n=5)}P(X_{n+1}=4\right)=\frac{3}{6}P(X_n=3)+\frac{5}{6}P(X_n=5)\\
P\left(X_{n+1}=5\right) &= \underbrace{P(X_n=0\cap X_{n+1}=5)+\cdots+P(X_n=3\cap X_{n+1}=5)}_{=0}+P(X_n=4\cap X_{n+1}=5)\\
&\quad+\underbrace{P\left(X_n=5\cap X_{n+1}=5\right)}_{=0}+P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=5\right)\\
&= P(X_n=4)P_{(X_n=4)}P(X_{n+1}=5)+P\left(X_n=6)P_{(X_n=6)}P(X_{n+1}=5\right)=\frac{2}{6}P(X_n=4)+\frac{6}{6}P(X_n=6)\\
P\left(X_{n+1}=6\right) &= \underbrace{P(X_n=0\cap X_{n+1}=6)+\cdots+P(X_n=4\cap X_{n+1}=6)}_{=0}+P\left(X_n=5\cap X_{n+1}=6\right)\\
&\quad+\underbrace{P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=6\right)}_{=0}\\
&= P\left(X_n=5\right)P_{(X_n=5)}P\left(X_{n+1}=6\right)=\frac{1}{6}P(X_n=5)
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités : elle est identique à celle de la question 3, je laisse le lecteur le vérifier. En résumé, on a

$$\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=0\right) &= \frac{1}{6}P(X_n=1)\quad P\left(X_{n+1}=6\right)=\frac{1}{6}P(X_n=5)\quad P\left(X_{n+1}=1\right)=\frac{6}{6}P(X_n=0)+\frac{2}{6}P(X_n=2)\\
P\left(X_{n+1}=2\right) &= \frac{5}{6}P(X_n=1)+\frac{3}{6}P(X_n=3)\quad P\left(X_{n+1}=3\right)=\frac{4}{6}P(X_n=2)+\frac{4}{6}P(X_n=4)\\
P\left(X_{n+1}=4\right) &= \frac{3}{6}P(X_n=3)+\frac{5}{6}P(X_n=5)\quad P\left(X_{n+1}=5\right)=\frac{2}{6}P(X_n=4)+\frac{6}{6}P(X_n=6)
\end{aligned}$$

6. En utilisant les relations de récurrence précédentes, on a

$$\begin{aligned}
E\left(X_{n+1}\right) &= P(X_{n+1}=1)+2P(X_{n+1}=2)+3P(X_{n+1}=3)+4P(X_{n+1}=4)+5P(X_{n+1}=5)+6P(X_{n+1}=6)\\
&= \left\{\frac{6}{6}P(X_n=0)+\frac{2}{6}P(X_n=2)\right\}+2\left\{\frac{5}{6}P(X_n=1)+\frac{3}{6}P(X_n=3)\right\}+3\left\{\frac{4}{6}P(X_n=2)+\frac{4}{6}P(X_n=4)\right\}\\
&\quad+4\left\{\frac{3}{6}P(X_n=3)+\frac{5}{6}P(X_n=5)\right\}+5\left\{\frac{2}{6}P(X_n=4)+\frac{6}{6}P(X_n=6)\right\}+6\left\{\frac{1}{6}P(X_n=5)\right\}\\
&= P(X_n=0)+\frac{5}{3}P(X_n=1)+\frac{7}{3}P(X_n=2)+3P(X_n=3)+\frac{11}{3}P(X_n=4)+\frac{13}{3}P\left(X_n=5\right)+5P\left(X_n=6\right)
\end{aligned}$$

La relation demandée n'apparaissant directement, nous allons expliciter $E(X_{n+1})-\dfrac{2}{3}E(X_n)$

$$\frac{2}{3}E(X_n)=\frac{2}{3}P(X_n=1)+\frac{4}{3}P(X_n=2)+2P(X_n=3)+\frac{8}{3}P(X_n=4)+\frac{10}{3}P(X_n=5)+4P(X_n=6)$$

$$E(X_{n+1})-\frac{2}{3}E(X_n)=P(X_n=0)+\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)P(X_n=1)+\left(\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\right)P(X_n=2)+(3-2)\,P(X_n=3)$$

$$+\left(\frac{11}{3}-\frac{8}{3}\right)P\left(X_n=4\right)+\left(\frac{13}{3}-\frac{10}{3}\right)P\left(X_n=5\right)+(5-4)\,P\left(X_n=6\right)$$

$$=P(X_n=0)+P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P\left(X_n=4\right)+P\left(X_n=5\right)+P\left(X_n=6\right)=1$$

puisque les évènements $(X_n=k)_{k\in[\![0,6]\!]}$ forment un système complet d'évènements.

La suite $(E(X_n))_n$ étant arithmético-géométrique, on détermine pour commencer la constante L : $L=\dfrac{2}{3}L+1\Leftrightarrow L=3$

La suite $u_n=E(X_n)-3\Leftrightarrow E(X_n)=u_n+3$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ donc

$$u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n u_0\Leftrightarrow E(X_n)-3=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(E(X_0)-3\right)\Leftrightarrow E(X_n)=3-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

En effet, après 0 changement, c'est-à-dire à l'état initial, l'urne U_1 contient 2 boules donc $X_0=2$ et en particulier $E(X_0)=2$. Puisque $\dfrac{2}{3}\in]-1,1[$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}E(X_n)=3$.