correction de l'exercice 1

1. <u>Loi de R</u> : Il est évident que $R(\Omega) = [\![1,6]\!]$ (au mieux on pioche 5 boules vertes et donc 1 boule rouge) et

$$\forall k \in [\![1,6]\!], \quad P(R=k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{15}{6}}.$$

Justification du calcul : Pour les cas possibles on choisit 6 boules parmi les 15 disponibles et pour les cas favorables, on choisit k boules parmi les 10 boules rouges disponibles et les $6-k$ autres parmi les 5 vertes.
La variable R suit donc la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(6,10,15)$ et $E(R) = 6 \times \frac{10}{15} = 4$. Un calcul direct nous donne

$$E(R^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(R=k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{15}{6}} = \frac{118}{7} \Rightarrow V(R) = E(R^2) - (E(R))^2 = \frac{118}{7} - 16 = \frac{6}{7}$$

<u>Loi de V</u> : Il est évident que $V(\Omega) = [\![0,5]\!]$ (on peut avoir 0 boule verte si l'on pioche 6 boules rouges) et

$$\forall k \in [\![0,5]\!], \quad P(V=k) = \frac{\binom{5}{k}\binom{10}{6-k}}{\binom{15}{6}}.$$

Justification du calcul : Pour les cas possible,s on choisit 6 boules parmi les 15 disponibles et pour les cas favorables, on choisit k boules parmi les 5 boules vertes disponibles et les $6-k$ autres parmi les 10 rouges.
La variable V suit donc la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(5,5,15)$ et $E(V) = 6 \times \frac{5}{15} = 2$. Un calcul direct nous donne

$$E(V^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(V=k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{\binom{5}{k}\binom{10}{6-k}}{\binom{15}{6}} = \frac{34}{7} \Rightarrow V(V) = E(V^2) - (E(V))^2 = \frac{34}{7} - 2 = \frac{20}{7}$$

Les variables V et R ne sont pas indépendantes puisque $P(R=1 \cap V=0) = 0$ (on ne peut piocher 6 boules dont 1 rouge et 0 verte) et

$$P(R=1)P(V=0) = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{6-1}}{\binom{15}{6}} \times \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{6-0}}{\binom{15}{6}} \neq 0 \Rightarrow P(R=1 \cap V=0) \neq P(R=1)P(V=0)$$

2. On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " piocher une boule dans l'urne contenant 10 boules rouges et 5 boules vertes ". Puisque les tirages sont avec remise, le fait de piocher 6 boules avec remise signifie que l'on considère 6 expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendante des autres. Les variables R et V représentent respectivement le nombre réalisations de l'évènement A : " obtenir une boule rouge " et de l'évènement B : " obtenir une boule verte ". La probabilité de réalisation de l'évènement A étant égale à $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ et celle de l'évènement B étant égale à $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, on en déduit que les variables R et V suivent respectivement la loi binomiale $\mathcal{B}\left(6, \frac{2}{3}\right)$ et $\mathcal{B}\left(6, \frac{1}{3}\right)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
R(\Omega) &= [\![0,6]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,6]\!], \quad P(R=k) = \binom{6}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(1-\frac{2}{3}\right)^{6-k} = \binom{6}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k} \\
E(R) &= 6 \times \frac{2}{3} = 4 \quad V(R) = 6 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \\
V(\Omega) &= [\![0,6]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,6]\!], \quad P(V=k) = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(1-\frac{1}{3}\right)^{6-k} = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{6-k} \\
E(R) &= 6 \times \frac{1}{3} = 2 \quad V(R) = 6 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Les variables V et R ne sont pas indépendantes puisque $P(R=0 \cap V=0) = 0$ (on ne peut piocher 6 boules dont 0 rouge et 0 verte) et

$$P(R=0)P(V=0) = \binom{6}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^{6-0} \times \binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{6-0} \neq 0 \Rightarrow P(R=0 \cap V=0) \neq P(R=0)P(V=0)$$

3. Il est immédiat que $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$. Pour calculer les probabilités correspondantes, on considère l'évènement R_k : "obtenir une boule rouge à la k^{e} pioche".

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P(R_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \\
P(X=2) &= P(\overline{R_1}R_2) = P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{5}{15} \times \frac{10}{14} = \frac{5}{21} \\
P(X=3) &= P(\overline{R_1}\,\overline{R_2}R_3) = P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}}(R_3) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{10}{13} = \frac{20}{273} \\
P(X=4) &= P(\overline{R_1}\,\overline{R_2}\,\overline{R_3}R_4) = P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}}(\overline{R_3})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}\,\overline{R_3}}(R_4) = \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} \times \frac{10}{12} = \frac{5}{273} \\
P(X=5) &= P(\overline{R_1}\,\overline{R_2}\,\overline{R_3}\,\overline{R_4}R_5) = P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}}(\overline{R_3})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}\,\overline{R_3}}(\overline{R_4})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}\,\overline{R_3}\,\overline{R_4}}(R_5) \\
&= \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{10}{11} = \frac{10}{3003} \\
P(X=6) &= P(\overline{R_1}\,\overline{R_2}\,\overline{R_3}\,\overline{R_4}\,\overline{R_5}R_6) = P(\overline{R_1})P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}}(\overline{R_3})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}\,\overline{R_3}}(\overline{R_4})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}\,\overline{R_3}\,\overline{R_4}}(\overline{R_5})P_{\overline{R_1}\,\overline{R_2}\,\overline{R_3}\,\overline{R_4}\,\overline{R_5}}(R_6) \\
&= \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} \times \frac{2}{12} \times \frac{1}{11} \times \frac{10}{10} = \frac{1}{3003}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 2

1. On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " le client contacte le service " ainsi que l'évènement A : " le client subit un retard ". On considère 8 expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendantes des autres et X désigne le nombre de succès de l'évènement A. La probabilité de l'évènement A étant égale à $\frac{1}{4}$, on en déduit que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8, \frac{1}{4}\right)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= [\![0,8]\!], \quad \forall k \in [\![0,8]\!], \quad P(X=k) = \binom{8}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{8-k} = \binom{8}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{8-k} \\
E(X) &= 8 \times \frac{1}{4} = 2 \qquad V(X) = 8 \times \frac{1}{4} \times \left(1-\frac{1}{4}\right) = 6
\end{aligned}$$

2. Il est évident que $M(\Omega) = [\![0,2]\!]$ et que $\forall k \in [\![0,2]\!], \quad P(M=k) = \dfrac{\binom{2}{k}\binom{6}{4-k}}{\binom{8}{4}}$.

   Justification du calcul : Pour les cas possible,s on choisit 4 clients parmi les 8 sélectionnés et pour les cas favorables, on choisit k clients parmi les 2 clients mécontents et les $4-k$ autres parmi les 6 clients satisfaits.
   Ainsi la variable M suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(4,2,8)$, ce qui nous donne $E(M) = 4 \times \frac{2}{8} = 1$.

correction de l'exercice 3

La variable X_n : On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " piocher une boule dans l'urne contenant 2 boules blanches et 8 boules noires " ainsi que l'évènement A : " piocher une boule blanche ". On considère n expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendantes des autres et X_n désigne le nombre de réalisations de l'évènement A. La probabilité de l'évènement A étant égale à $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, on en déduit que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{5}\right)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
X_n(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(X_n=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \\
E(X_n) &= n \times \frac{1}{5} = \frac{n}{5} \qquad V(X_n) = n \times \frac{1}{5} \times \left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{4n}{25}
\end{aligned}$$

Expression de Y_n : On pioche X_n boules blanches et, comme on pioche n boules au total, $n - X_n$ boules noires. Chaque boule blanche fait gagner 2 points, donc les X_n boules blanches font gagner $2X_n$ points, et chaque boule noire fait perdre 3 points, donc les $n - X_n$ boules noires font perdre $3(n - X_n)$ points. Par conséquent, le nombre de points obtenus est égal à $Y_n = 2X_n - 3(n - X_n) = 5X_n - 3n$.

La variable Y_n : Puisque $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$, on a : $Y_n(\Omega) = \{5k-3n, \quad k \in [\![0,n]\!]\}$. Cet ensemble n'étant pas explicitable aisément (car $X_n(\Omega) = \{-3n, -3n+5, -3n+10, ..., 2n-5, 2n\}$) on gardera cette notation.

$$\forall k \in X_n(\Omega), \quad P(X_n = k) = P(5Y_n - 3n = k) = P\left(Y_n = \frac{3n+k}{5}\right) = \binom{n}{\frac{3n+k}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3n+k}{5}} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-\frac{3n+k}{5}}$$

Remarquons que $k \in Y_n(\Omega)$ alors il existe un entier $q \in [\![0,n]\!]$ tel que $k = 5q - 3n$ donc $\dfrac{3n+k}{5} = q$ est bien un nombre entier naturel.

correction de l'exercice 4

La variable Y_n : On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " le puce saute d'une ou deux cases " ainsi que l'évènement A : " la puce saute d'une case ". On considère n expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendantes des autres et Y_n désigne le nombre de réalisations de l'évènement A. La probabilité de l'évènement A étant égale à $\dfrac{1}{2}$ (la puce choisit au hasard de sauter d'une ou de deux cases), on en déduit que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$, ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} Y_n(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(Y_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \\ E(Y_n) &= n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \qquad V(Y_n) = n \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4} \end{aligned}$$

Expression de X_n : La puce saute Y_n fois d'une case et, comme elle effectue n sauts au total, elle saute de deux cases $n - Y_n$ fois. Chaque saut d'une case permet à la puce d'avancer ..... d'une case (!!), donc les Y_n sauts d'une case lui permette d'avancer de Y_n cases, et chaque saut de deux cases lui permettant d'avancer ...... de deux cases (sic), donc les $n - Y_n$ sauts de deux cases lui permettent d'avance de $2(n - Y_n)$ cases. Par conséquent, la puce avance de $X_n = Y_n + 2(n - Y_n) = 2n - Y_n$ cases.

La variable Y_n : Il est alors immédiat que

$$E(X_n) = E(2n - Y_n) = 2n - E(Y_n) = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2} \qquad V(X_n) = V(2n - Y_n) = (-1)^2 V(Y_n) = \frac{n}{4}$$

Puisque $Y_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$, on a : $X_n(\Omega) = \{2n-k, \quad k \in [\![0,n]\!]\} = [\![n,2n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![n,2n]\!], \quad P(X_n = k) = P(2n - Y_n = k) = P(Y_n = 2n-k) = \frac{\binom{n}{2n-k}}{2^n}$$

correction de l'exercice 5

1. On considère l'expérience $\mathcal{E}$: " lancer le dé D ". Puisque les tirages sont avec remise, le fait de lancers n fois le dé D signifie que l'on considère n expériences absolument identiques à l'expérience $\mathcal{E}$, chaque expérience étant indépendante des autres. La variable $X_n^{(i)}$ représente le nombre réalisations de l'évènement A_i : " la face obtenue porte le numéro i ". La probabilité de réalisation de l'évènement A_1 (resp. A_2, resp. A_3) étant égale à $\dfrac{7}{20}$ (resp. $\dfrac{8}{20}$, resp. $\dfrac{5}{20}$), on en déduit que la variable $X_n^{(1)}$ (resp. $X_n^{(2)}$, resp. $X_n^{(3)}$) suit la loi

binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{7}{20}\right)$ (resp. $\mathcal{B}\left(n, \frac{8}{20}\right)$, resp. $\mathcal{B}\left(n, \frac{5}{20}\right)$), ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
X_n^{(1)}(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad P\left(X_n^{(1)}=k\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(1-\frac{7}{20}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{n-k} \\
E(X_n^{(1)}) &= n\times\frac{7}{20} = \frac{7n}{20} \qquad V(X_n^{(1)}) = n\times\frac{7}{20}\times\left(1-\frac{7}{20}\right) = \frac{91}{400}n \\
X_n^{(2)}(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad P\left(X_n^{(2)}=k\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{8}{20}\right)^k\left(1-\frac{8}{20}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{8}{20}\right)^k\left(\frac{12}{20}\right)^{n-k} \\
E(X_n^{(2)}) &= n\times\frac{8}{20} = \frac{8n}{20} \qquad V(X_n^{(2)}) = n\times\frac{8}{20}\times\left(1-\frac{8}{20}\right) = \frac{6}{25}n \\
X_n^{(3)}(\Omega) &= [\![0,n]\!], \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad P\left(X_n^{(3)}=k\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{5}{20}\right)^k\left(1-\frac{6}{20}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{5}{20}\right)^k\left(\frac{15}{20}\right)^{n-k} \\
E(X_n^{(3)}) &= n\times\frac{5}{20} = \frac{5n}{20} \qquad V(X_n^{(3)}) = n\times\frac{5}{20}\times\left(1-\frac{5}{20}\right) = \frac{3}{16}n
\end{aligned}$$

2. L'évènement $\left(X_n^{(1)}=0\right)\cap\left(X_n^{(2)}=0\right)$ signifie que les faces 1 et 2 ne sont pas apparues lors des n lancers donc les n lancers ont donné uniquement des faces 3 donc $\left(X_n^{(1)}=0\right)\cap\left(X_n^{(2)}=0\right) = \left(X_n^{(3)}=n\right)$. Par conséquent, on a

$$P\left[\left(X_n^{(1)}=0\right)\cap\left(X_n^{(2)}=0\right)\right] = P\left(X_n^{(3)}=n\right) = \left(\frac{5}{20}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

D'autre part, on a

$$P\left(X_n^{(1)}=0\right)P\left(X_n^{(2)}=0\right) = \left(\frac{13}{20}\right)^n\left(\frac{12}{20}\right)^n = \left(\frac{13\times12}{20\times20}\right)^n = \left(\frac{39}{100}\right)^n$$

donc $P\left[\left(X_n^{(1)}=0\right)\cap\left(X_n^{(2)}=0\right)\right] \neq P\left(X_n^{(1)}=0\right)P\left(X_n^{(2)}=0\right)$, ce qui implique que les variables $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$ ne sont pas indépendantes.

3. On note G_n le gain du jeu. Il est immédiat que $G_n = 1\times X_n^{(1)} - 2\times X_n^{(2)} + a\times X_n^{(3)}$. Le gain du jeu est positif en moyenne si et seulement si

$$\begin{aligned}
E(G_n) &\geqslant 0 \Leftrightarrow E\left(X_n^{(1)} - 2X_n^{(2)} + aX_n^{(3)}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow E\left(X_n^{(1)}\right) - 2E\left(X_n^{(2)}\right) + aE\left(X_n^{(3)}\right) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{7n}{20} - 2\times\frac{8n}{20} + a\times\frac{5n}{20} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{20}n\,(5a-9) \geqslant 0 \Leftrightarrow 5a-9 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Ainsi, le gain moyen du jeu est positif si et seulement $a \geqslant \frac{9}{5}$, autrement dit, si chaque lancer fournissant le numéro 3 rapporte au moins 1,8 euros.

correction de l'exercice 6

On considère une pièce telle que $P(Pile) = p \in]0,1[$. On lance n fois cette pièce. On note T_n le nombre de pioches nécessaires pour obtenir le premier Pile. On convient que $T_n = n+1$ si et seulement si on n'a pas obtenu de Pile durant les n premièrs lancers.

1. $T_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ (il faut au moins un lancer pour obtenir le premier pile et au plus n lancers, sauf si l'on obient aucun pile et dans ce cas $T_n = n+1$).
En notant P_k l'évènement " obtenir Pile au k^{e} lancer ", on a

$$\begin{aligned}
\forall k &\in [\![1,n]\!], \quad P(T_n=k) = P(\overline{P_1}\cdots\overline{P_{k-1}}P_k) = (1-p)^{k-1}p \quad P(T_n=n+1) = P(\overline{P_1}\cdots\overline{P_n}) = (1-p)^n \\
E(T_n) &= \sum_{k=1}^{n+1} kP(T_n=k) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}p + (n+1)(1-p)^n
\end{aligned}$$

2. $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$

   Puisque $\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ et en choisissant $x = 1-p$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} &= \frac{1-(n+1)(1-p)^n+n(1-p)^{n+1}}{p^2} \\ E(T_n) &= p \times \frac{1-(n+1)(1-p)^n+n(1-p)^{n+1}}{p^2} + (n+1)(1-p)^n\end{aligned}$$

   En utilisant les croissances comparées ($\lim_{n\to+\infty} n^\alpha q^n = \lim_{n\to+\infty} q^n$), on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$.

   Interprétation : en lançant, sans aucune limitation, la pièce, on obtient le premier pile au $(\frac{1}{p})^{\text{e}}$ tirage en moyenne.

correction de l'exercice 7

1. On introduit l'expérience $\mathcal{E}$ " appeller un correspondant " et l'évènement A : " obtenir le correspondant ". La secrétaire effectue n expériences identiques à l'expérience $\mathcal{E}$ et X désigne le nombre de réalisation de l'évènement A donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, où $p = P(A)$. On a donc, en notant $q = 1-q$,

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!], \quad \forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad E(X) = np, \quad V(X) = npq$$

2. (a) Il est évident que la secrétaire peut obtenir au total entre 0 et n correspondants donc $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

   (b) Calcul de $P(Z=0)$: Puisque X et Y sont des variables dont les valeurs possibles sont dans $[\![0,n]\!]$, on a immédiatement

$$P(Z=0) = P(X+Y=0) = P(X=0\cap Y=0) = P(X=0)P_{(X=0)}(Y=0) = q^n q^n = q^{2n}$$

   Justification des calculs de probabilités :
   $P(X=0)$ *: c'est la question 1*
   $P_{(X=0)}(Y=0)$ *: L'évènement $(X=0)$ est réalisé, donc la secrétaire a obtenu un correspondant à la première série d'appels et elle appelle les n correspondants à la deuxième série d'appels, et l'évènement $(Y=0)$ doit être réalisé, c'est-à-dire que la secrétaire ne contacte aucun des correspondants lors de la deuxième série d'appels. Par conséquent, la secrétaire appelle n correspondants et elle n'en obtient aucun. On est dans la même configuration que $X=0$, ce qui implique $P_{(X=0)}(Y=0) = q^n$.*
   Calcul de $P(Z=1)$: : Puisque X et Y sont des variables dont les valeurs possibles sont dans $[\![0,n]\!]$, on a immédiatement

$$\begin{aligned}P(Z=1) &= P(X+Y=1) = P(X=1\cap Y=0) + P(X=0\cap Y=1) \\ &= P(X=1)P_{(X=1)}(Y=0) + P(X=0)P_{(X=0)}(Y=1) = \left[\binom{n}{1}pq^{n-1}\right] \times \left[q^{n-1}\right] + [q^n] \times \left[\binom{n}{1}\right. \\ &= npq^{2n-2} + npq^{2n-1} = npq^{2n-2}(1+q)\end{aligned}$$

   Justification des calculs de probabilités :
   $P(X=1)$ *: c'est la question 1*
   $P_{(X=1)}(Y=0)$ *: L'évènement $(X=1)$ est réalisé, donc la secrétaire a obtenu un correspondant à la première série d'appels et elle appelle les $n-1$ autres correspondants à la deuxième série d'appels, et l'évènement $(Y=0)$ doit être réalisé, c'est-à-dire que la secrétaire ne contacte aucun correspondant lors de la deuxième série d'appels. Par conséquent, la secrétaire appelle $n-1$ correspondants et elle en obtient 0 donc $P_{(X=1)}(Y=0) = q^{n-1}$.*
   $P(X=0)$ *: c'est la question 1*
   $P_{(X=0)}(Y=1)$ *: L'évènement $(X=0)$ est réalisé, donc la secrétaire a obtenu un correspondant à la*

première série d'appels et elle appelle les n correspondants à la deuxième série d'appels, et l'évènement $(Y=1)$ doit être réalisé, c'est-à-dire que la secrétaire contacte un correspondant lors de la deuxième série d'appels. Par conséquent, la secrétaire appelle n correspondants et elle en obtient 1. On est dans la même configuration que $X=1$, ce qui implique $P_{(X=0)}(Y=1)=P(X=1)=\binom{n}{1}pq^{n-1}$

(c) L'évènement $(X=k)$ est réalisé, donc la secrétaire a contacté k correspondants à la première série d'appels et elle appelle les $n-k$ autres, et on souhaite la réalisation de l'évènement $(Y=h)$, c'est-à-dire que la secrétaire contacte h correspondants à la seconde série d'appels. Autrement dit, la secrétaire appelle $n-k$ correspondants et elle en obtient h. On est clairement dans une configuration binomiale (on répète $n-k$ expériences identiques à l'expérience $\mathcal{E}$ et on souhaite h réalisations de A) donc

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad \forall h\in[\![0,n-k]\!],\quad P_{(X=k)}(Y=h)=\binom{n-k}{h}p^hq^{(n-k)-h}=\binom{n-k}{h}p^hq^{n-k-h}$$

Remarque : Etant donné que la secrétaire appelle $n-k$ correspondants, elle pne peut contacter plus de $n-k$ correspondants (sic), c'est pour cette raison que l'énoncé considère $h\in[\![0,n-k]\!]$. Lorsque $h>n-k$, la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Y=h)$ est nulle puisqu'elle correspond à un évènement impossible (obtenir plus de correspondants que de personnes appelées)

(d) Puisque X et Y prennent des valeurs entre 0 et n, l'égalité $X+Y=s$ nécessite que $X=0$, donc $Y=s$, $X=1$, donc $Y=s-1$, $X=2$, donc $Y=s-2$, etc, jusqu'à $X=s$, donc $Y=s-s$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}P(Z=s)&=P(X+Y=s)=P(X=0\cap Y=s)+P(X=1)\cap Y=s-1)+\cdots P(X=s\cap Y=s-s)\\&=\sum_{k=0}^{s}P((X=k)\cap(Y=s-k)).\end{aligned}$$

(e) <u>Calcul de $P(Z=s)$</u> : D'après les questions 2.c) et 2.d), on a

$$\begin{aligned}P(Z=s)&=\sum_{k=0}^{s}P((X=k)\cap(Y=s-k))=\sum_{k=0}^{s}P(X=k)P_{(X=k)}(Y=s-k)\\&=\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\binom{n-k}{s-k}p^{s-k}q^{n-k-(s-k)}=\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}p^kq^{n-k}p^{s-k}q^{n-s}\\&=\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}p^sq^{2n-k-s}=p^sq^{2n-s}\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}q^{-k}\end{aligned}$$

<u>$\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}=\binom{n}{s}\binom{s}{k}$</u> : En utilisant la définition des combinatoires par les factorielles, on a

$$\left.\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(s-k)!((n-k)-(s-k))!}=\frac{n!}{k!(s-k)!(n-s)!}\\\binom{n}{s}\binom{s}{k}&=\frac{n!}{s!(n-s)!}\times\frac{s!}{k!(s-k)!}=\frac{n!}{k!(s-k)!(n-s)!}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}=\binom{n}{s}\binom{s}{k}$$

<u>$p_s=C_n^s[p(1+q)]^s(q^2)^{n-s}$</u> : En utilisant les deux égalités précédentes, on obtient

$$p_s=P(Z=s)=p^sq^{2n-s}\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}q^{-k}=p^sq^{2n-s}\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{s}\binom{s}{k}q^{-k}=\binom{n}{s}p^sq^{2n-s}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}q^{-k}$$

On voit apparaitre une belle formule du binôme avec $a=q^{-1}$ et $b=1$ donc

$$\begin{aligned}p_s&=\binom{n}{s}p^sq^{2n-s}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}(q^{-1})^k(1)^{k-s}=\binom{n}{s}p^sq^{2n-s}\left(1+q^{-1}\right)^s=\binom{n}{s}p^sq^{2n-s}\left(\frac{q+1}{q}\right)^s\\&=\binom{n}{s}p^sq^{2n-s}(q+1)^sq^{-s}=\binom{n}{s}p^sq^{2n-2s}(q+1)^s=\binom{n}{s}\left[p(q+1)\right]^s(q^2)^{n-s}\end{aligned}$$

(f) Puisque $q = 1 - p \Leftrightarrow p = 1 - q$, on a $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1 - q^2$ donc

$$Z(\Omega) = [\![0, n]\!], \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(Z = s) = \binom{n}{s} \left[1 - q^2\right]^s (q^2)^{n-s}$$

ce qui montre que Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1 - q^2) = \mathcal{B}(n, p(2-p))$
Remarque : on en déduit immédiatement que $E(Z) = np(2-p)$ et, puisque $E(X) = np$, on obtient que

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X)+E(Y) \Leftrightarrow E(Y) = E(Z)-E(X) = np(2-p)-np = np(2-p-1) = np(1-p)$$

En moyenne, la secrétaire obtient $np(1-p)$ correspondants.