correction de l'exercice 1

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{2}{(3x+1)^2} \geqslant 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2/3$

Ensuite,

$$x \geqslant \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x+1 \geqslant 2 \Rightarrow (3x+1)^2 \geqslant 4 \Leftrightarrow \frac{1}{(3x+1)^2} \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow f'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

et comme $f'(x) \geqslant 0$, on a donc $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui implique que $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(*la distance de* $f'(x)$ *à* 0 *est au plus la distance de* 0 *à* $\dfrac{1}{2}$, *c'est-à-dire* $\dfrac{1}{2}$)

(b) $f(x) - x = \dfrac{x-3x^2}{3x+1} = \dfrac{x(1-3x)}{3x+1} \geqslant 0$ sur $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ et $\leqslant 0$ sur $\left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$.

D'autre part, $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, \dfrac{1}{3}\right\}$

(c) D'après la question 1.a), la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a

$$f\left(\left[0, \frac{1}{3}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \left[0, \frac{1}{3}\right] \subset \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad f\left(\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\subset \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

2. (a) <u>$u_n \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$</u> : On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$

Initialisation : $u_0 \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ donc $f(u_n) \in f\left(\left[0, \dfrac{1}{3}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ (par stabilité de $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ par f, d'après la question 1.c)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

<u>Monotonie de u</u> : Puisque $f(x) - x \geqslant 0$ sur $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]$, on en déduit que $f(u_n) - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc la suite u est croissante.

(b) La suite u est croissante et minorée par $\dfrac{1}{3}$ donc elle converge. Sa limite L est un point fixe de f donc $L \in \left\{0, \dfrac{1}{3}\right\}$.

Premier cas : $u_0 = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ donc $L = 0$.

Second cas : $0 < u_0 \leqslant \dfrac{1}{3}$. La suite u est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0$ donc $L \geqslant u_0$. Puisque $u_0 > 0$, on a $L > 0$.et donc $L = \dfrac{1}{3}$.

3. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$

Initialisation : $u_0 \in \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ d'après l'énoncé donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ donc $f(u_n) \in f\left(\left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[\right) \subset \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ (par stabilité de $\left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ par f, d'après la question 1.c)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

<u>Monotonie de u</u> : Puisque $f(x) - x \leqslant 0$ sur $\left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$, on en déduit que $f(u_n) - u_n \leqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc la suite u est décroissante.

(b) La suite u est décroissante et minorée par $\dfrac{1}{3}$ donc elle converge. Sa limite L est nécessairement $\geqslant \dfrac{1}{3}$ et c'est un point fixe de f donc $L \in \left\{0, \dfrac{1}{3}\right\}$, ce qui entraine que $L = \dfrac{1}{3}$.

(c) La question 1.a) permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :

$$\forall x, y \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$) et $y = \frac{1}{3}$ (qui appartient aussi à $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ (puisque $\frac{1}{3}$ est un point fixe de f donc il est solution de $f(x) = x$), on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1} - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \frac{1}{3}\right|.$$

(d) Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \frac{1}{3}\right|$ ".

Initialisation : $\frac{1}{2^0}\left|u_0 - \frac{1}{3}\right| = \left|u_0 - \frac{1}{3}\right| \geqslant \left|u_0 - \frac{1}{3}\right|$ donc $\left|u_0 - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^0}\left|u_0 - \frac{1}{3}\right|$ et on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \frac{1}{3}\right|$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $\left|u_{n+1} - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \frac{1}{3}\right|$ donc

$$\left|u_{n+1} - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}\left|u_0 - \frac{1}{3}\right|$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(e) On sait que $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2^n} \times \frac{14}{3}$ et on veut que $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant 10^{-4}$. Il suffit de demander que $\left|u_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \times \frac{14}{3} \leqslant 10^{-4}$, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{2^n} \times \frac{14}{3} \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{3}{14} \times 10^{-4} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \ln\left(\frac{3}{14} \times 10^{-4}\right) \underset{\ln(1/2)<0}{\Leftrightarrow} n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{3}{14} \times 10^{-4}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Puisque $\dfrac{\ln\left(\frac{3}{14} \times 10^{-4}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \simeq 15.51 \pm 10^{-2}$, on peut choisir $n = 16$.

correction de l'exercice 2

1. (a) La fonction f est croissante sur $[0, 2]$ (comme composée de deux fonctions croissantes) donc $f([0, 2]) = [f(0), f(2)] = [1, \sqrt{3}] \subset [1, 2]$

Ensuite, la fonction f est dérivable sur $[1, 2]$ (car $x \mapsto x + 1$ l'est, $x + 1 > 0$ sur $[1, 2]$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$) et l'on a

$$\forall x \in [1, 2], \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{et} \quad \sqrt{x+1} \geqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

(*la distance de* $f'(x)$ *à* 0 *est au plus la distance de* 0 *à* $\frac{1}{2}$, *c'est-à-dire* $\frac{1}{2}$)

(b) $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x$. Par conséquent, x est nécessairement positif (car une racine carrée l'est toujours) donc

$$\sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow x + 1 = x^2 \underset{x \text{ et } x+1 \geqslant 0}{\Leftrightarrow} x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Evidemment, seul $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in [0, 2]$ donc $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0,2]$
Initialisation : $u_0 = 0 \in [0,2]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [0,2]$ donc $f(u_n) \in f([0,2]) \subset [0,2]$ (par stabilité de $[0,1]$ par f, d'après la question 1.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,2]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) $\underline{|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - r|}$: La question 1.a) permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :

$$\forall x, y \in [0,2], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2} |x - y| .$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[0,2]$) et $y = r$ (qui appartient aussi à $[0,2]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(r) = r$ (puisque r est un point fixe de f donc il est solution de $f(x) = x$), on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - r| .$$

$\underline{|u_n - r| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - r| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ ".
Initialisation : $|u_0 - r| = |0 - r| = r \leqslant 2$ (question 1.b)) et $\frac{1}{2^{0-1}} = \frac{1}{2^{-1}} = 2$ donc $|u_0 - r| \leqslant \frac{1}{2^{0-1}}$ et on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - r| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - r|$ donc

$$|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - r| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ainsi qu'un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

(d) A l'aide d'un tableur, donner une valeur approchée de r à 10^{-9} près.
Il suffit de demander que $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $|u_n - r| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow (n-1) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \ln 10^{-9} \underset{\ln(\frac{1}{2}) \leqslant 0}{\Leftrightarrow} n - 1 \geqslant \frac{\ln 10^{-9}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow n \geqslant 1 + \frac{\ln 10^{-9}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Puisque $1 + \frac{\ln 10^{-9}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \simeq 30.89 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 31.

(e) On a $r \simeq u_{31} \pm 10^{-9}$. En utilisant le code suivant dans le tableur.

	A	**B**
1	**n**	**suite u**
2		
3	0	0
4	1	=(B3 +1)^(1/2)
	⋮	⋮
34	31	=(B32 +1)^(1/2)

, on obtient u_{31}, ce qui nous donne $r \simeq 0,6972243623 \pm 10^{-9}$ (on conserve 9 décimales)

correction de l'exercice 3

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et sa dérivée est $f'(x) = \frac{2}{5}x$.

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	3/5	↗	4/5

La fonction f étant croissante sur $[0,1]$ et $f([0,1]) = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right] \subset [0,1]$.

(b) $f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}(3+x^2) = x \Leftrightarrow 3 + x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Par conséquent, l'unique point fixe $r \in [0,1]$ est $r = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$ (puisque $3^2 \leqslant 13 \leqslant 4^2$, on a $3 \leqslant \sqrt{13} \leqslant 4$)

(c) On a : $f'(x) = \dfrac{2}{5}x$ donc $\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2}{5}$ ce qui implique que $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{2}{5}$.

(*la distance de* $f'(x)$ *à* 0 *est au plus la distance de* 0 *à* $\dfrac{2}{5}$, *c'est-à-dire* $\dfrac{2}{5}$)

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0,1]$

Initialisation : $u_0 \in [0,1]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [0,1]$ donc $f(u_n) \in f([0,1]) \subset [0,1]$ (par stabilité de $[0,1]$ par f, d'après la question 1.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) $\underline{|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{5} |u_n - r|}$: La question 1.c) permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{5} |x - y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[0,1]$) et $y = r$ (qui appartient aussi à $[0,1]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(r) = r$ (puisque r est un point fixe de f donc il est solution de $f(x) = x$), on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{5} |u_n - r|.$$

$\underline{|u_n - r| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - r| \leqslant (\frac{2}{5})^n$ ".

Initialisation : $|u_0 - r| = |0 - r| = r \leqslant 1$ (question 1.b)) et $\left(\dfrac{2}{5}\right)^0 = 1$ donc $|u_0 - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ et on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{2}{5} |u_n - r|$ donc

$$|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{5} |u_n - r| \leqslant \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) Il suffit de demander que $\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \leqslant 10^{-10}$ (dans ce cas, $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n \leqslant 10^{-10}$) et l'on a

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n \leqslant 10^{-10} \Leftrightarrow n \ln(\frac{2}{5}) \leqslant -10 \ln 10 \underset{\ln(\frac{2}{5}) \leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{10 \ln 10}{\ln(\frac{2}{5})}$$

Puisque $-\dfrac{10 \ln 10}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \simeq 25.13 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 26.

(d) On a $r \simeq u_{26} \pm 10^{-10}$. En utilisant le code suivant dans le tableur.

	A	B
1	**n**	**suite u**
2		
3	0	0
4	1	=(1/5)*(3+(B3)^2)
	⋮	⋮
29	26	=(1/5)*(3+(B32)^2)

, on obtient u_{26}, ce qui nous donne $r \simeq 1,618033989 \pm 10^{-9}$ (on conserve 9 décimales)

correction de l'exercice 4

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - \frac{x}{2}$ qui s'annule pour $x = 2$ donc son tableau de variation est donné par

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	$+\infty$ / $-\infty$

<u>Points fixes</u> : $f(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{1}{4}(2 - x^2) = x \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4}(2 - x^2) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

(b) La fonction $f'(x) = 1 - \frac{x}{2}$ est décroissante (fonction affine de coefficient " directeur " -1) donc $\forall x \in [1, 2], \quad 0 = f'(2) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1) = \frac{1}{2}$ donc $\forall x \in [1, 2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

(*la distance entre* $f'(x)$ *et* 0 *est au plus la distance entre* 0 *et* $\frac{1}{2}$ *c'est-à-dire au plus* $\frac{1}{2}$).

La fonction f est croissante sur $[1, 2] (\subset] - \infty, 2])$ donc $f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}] \subset [1, 2]$ (je ne fais pas le tableau, mais pensez à le faire)

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [1, 2]$

Initialisation : $u_0 = 1 \in [1, 2]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [1, 2]$ donc $f(u_n) \in [1, 2]$ (par stabilité de $[1, 2]$ par f, d'après la question 1.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [1, 2]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) La question 1.b) combinée au fait que f est dérivable sur $[1, 2]$ permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :

$$\forall x, y \in [1, 2], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2} |x - y| .$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[1, 2]$) et $y = \sqrt{2}$ (qui appartient aussi à $[1, 2]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \left|u_n - \sqrt{2}\right| .$$

(c) Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant (\frac{1}{2})^n$ ".

Initialisation : $\left|u_0 - \sqrt{2}\right| = \left|1 - \sqrt{2}\right| \leqslant 1$ (puisque la distance entre 1 et $\sqrt{2}$ ne peut excéder la distance entre 1 et 2 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \left|u_n - \sqrt{2}\right|$ donc

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0 \leqslant \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et la suite $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|u_n - \sqrt{2}\right| = 0$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \sqrt{2}$ (la distance entre u_n et $\sqrt{2}$ tend vers 0)

(d) Il suffit de demander que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant -9 \ln 10 \underset{\ln(\frac{1}{2}) \leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{9 \ln 10}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Puisque $-\frac{9 \ln 10}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \simeq 29.90 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 30.

(e) On a $\sqrt{2} \simeq u_{30} \pm 10^{-9}$. En utilisant le code suivant dans le tableur.

	A	B
1	n	suite u
2		
3	0	1
4	1	=B3+(1/2)*(2-(B3)^2)
	⋮	⋮
33	30	=B32+(1/2)*(2-(B32)^2)

, on obtient u_{30}, ce qui nous donne $\sqrt{2} \simeq 1,414213562 \pm 10^{-9}$ (on conserve 9 décimales)

correction de l'exercice 5

1. Variations de f : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ (somme de fonctions dérivables de référence), sa dérivée est

$$\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{x^2}) = \frac{x^2-3}{2x^2} = \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{2x^2}$$

Le tableau de variations de f est donc

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x-\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$+$		$+$	
$2x^2$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Signe de $f(x)-x$: $f(x) - x = \dfrac{3}{2x} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{3-x^2}{2x}$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ sur $]0, \sqrt{3}]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[\sqrt{3}, +\infty[$.
Points fixes de f : $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$
$f([\sqrt{3}, +\infty[) = [\sqrt{3}, +\infty[$: le tableau de variations de f montre que $f([\sqrt{3}, +\infty[) = [\sqrt{3}, +\infty[$.

2. $u_n \geqslant \sqrt{3}$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [\sqrt{3} + \infty[$
Initialisation : $u_0 = 2 \in]\sqrt{3}, +\infty[$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [\sqrt{3}, +\infty[$ donc $f(u_n) \in [\sqrt{3}, +\infty[$ (par stabilité de $[\sqrt{3}, +\infty[$ par f) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [\sqrt{3}, +\infty[$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Monotonie de u : Puisque $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{3}$, on en déduit que $f(u_n) - u_n \leqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc la suite u est décroissante.
Convergence et limite : La suite u est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$ donc elle converge. Sa limite L est un point fixe de f et appartient à $[\sqrt{3}, +\infty[$ donc $L = \sqrt{3}$.

3. $\left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right|$: La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{3}{x^2})$. La fonction f' est strictement croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ (sa dérivée est strictement positive sur $[\sqrt{3}, +\infty[$) et son tableau de variations est

x	$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$

ce qui nous permet d'affirmer que

$$\forall x \in [\sqrt{3}, +\infty[\qquad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2} \Longrightarrow |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

(la distance de $f'(x)$ à 0 est moindre que la distance de $\dfrac{1}{2}$ à 0, c'est-à-dire à $\dfrac{1}{2}$)
La fonction f est dérivable sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et l'inégalité précédente permet d'appliquer l'inégalité des acrroissements finis

$$\forall x, y \in [\sqrt{3}, +\infty[, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[\sqrt{3}, +\infty[$) et $y = \sqrt{3}$ (qui appartient aussi à $[\sqrt{3}, +\infty[$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right|.$$

$\underline{\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ ".

Initialisation : $\left|u_0 - \sqrt{3}\right| = \left|2 - \sqrt{3}\right| \leqslant 1$ (puisque $\sqrt{3} \in [1, 2]$, la distance entre 2 et $\sqrt{3}$ ne peut excéder la distance entre 1 et 2 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\frac{1}{2^0} = 1$, on en déduit que $\left|u_0 - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^0}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et nous avons montré précédemment l'inégalité $\left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right|$ donc

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

4. Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0 \leqslant \left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et la suite $(\frac{1}{2^n})_n$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|u_n - \sqrt{3}\right| = 0$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{3}$ (la distance entre u_n et $\sqrt{3}$ tend vers 0)

5. Il suffit de demander que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow n\ln(\frac{1}{2}) \leqslant -9\ln 10 \underset{\ln(\frac{1}{2})\leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{9\ln 10}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Puisque $-\frac{9\ln 10}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \simeq 29.90 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 30.

On a $\sqrt{3} \simeq u_{30} \pm 10^{-9}$. En utilisant le code suivant dans le tableur.

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	2
4	n=1	=(1/2)*(B3+3/B3)
	⋮	⋮
33	n=30	=(1/2)*(B32+3/B32)

, on obtient u_{30}, ce qui nous donne $\sqrt{3} \simeq 1,732050808 \pm 10^{-9}$ (on conserve 9 décimales)

correction de l'exercice 6

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car $x \mapsto \ln x$ l'est) et sa dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{4x}$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f étant décroissante sur $[3, 4]$, on a $f([3, 4]) = [f(4), f(3)] \subset [3, 4]$ (puisque $f(4) \simeq 3.65 \pm 10^{-2}$ et $f(3) \simeq 3.72 \pm 10^{-2}$)

(b) L'équation $f(x) = x$ ne pouvant être résolue par des méthodes algébriques usuelles (équations du premier ou second degré, équations $ab = 0$, changement de variable, etc.), on introduit la fonction g définie sur $[3, 4]$ par : $\forall x \in [3, 4], \quad g(x) = f(x) - x = 4 - \frac{\ln x}{4} - x$.

La fonction g est la somme de deux fonctions strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ d'où elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc sur $[3, 4]$ (on peut également dire que $f'(x) = -\frac{1}{4x} - 1 < 0$ sur $[3, 4]$)

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[3,4]$ donc elle réalise une bijection de $[3,4]$ sur $[g(4), g(3)]$. Puisque $g(3) = f(3) - 3 \simeq 0.72 \pm 10^{-2}$ et $g(4) = f(4) - 4 \simeq -0.35 \pm 10^{-2}$, on en déduit que $0 \in [g(4), g(3)]$. Par conséquent, l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $[3,4]$ (existence et unicité de l'antécédent que 0 par g sur $[3,4]$)

(c) On a : $\forall x \in [3,4], \quad f'(x) = -\dfrac{1}{4x}$ donc $-\dfrac{1}{12} \leqslant f'(x) \leqslant -\dfrac{1}{16}$ (encadrement à la main ou en utilisant la croissance de f') ce qui implique que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$ (la distance de $f'(x)$ à 0 est moindre que la distance de $-\dfrac{1}{12}$ à 0, c'est-à-dire $\dfrac{1}{12}$). Puisque $\dfrac{1}{12} \leqslant \dfrac{1}{10}$, on en déduit que $\forall x \in [3,4], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{10}$.

2. (a) $|u_{n+1} - L| \leqslant \dfrac{1}{10} |u_n - L|$: On est bien tenté d'appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $[3,4]$ (puisque la question 1.c) s'y réfère clairement) mais on ne sait pas que tous les termes u_n de la suite u sont bien dans $[3,4]$ donc nous devons le montrer au préalable.

Pour cela, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [3,4]$

Initialisation : $u_0 \in [3,4]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [3,4]$ donc $f(u_n) \in [3,4]$ (par stabilité de $[3,4]$ par f, d'après la question 1.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [3,4]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

La question 1.c) nous permet d'utiliser l'inégalité des accroissements à f sur l'intervalle $[3,4]$, ce qui nous donne :

$$\forall x, y \in [3,4], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{10} |x - y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[3,4]$) et $y = L$ (qui appartient aussi à $[3,4]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(L) = L$ (L est quand même un point fixe !), on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{10} |u_n - L|.$$

$|u_n - L| \leqslant \dfrac{1}{10^n}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - L| \leqslant \dfrac{1}{10^n}$ ".

Initialisation : $|u_0 - L| \leqslant 1$ (puisque u_0 et L appartiennent à $[3,4]$, la distance entre u_0 et L ne peut excéder la distance entre 3 et 4 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\dfrac{1}{10^0} = 1$, on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - L| \leqslant \dfrac{1}{10^n}$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $|u_{n+1} - L| \leqslant \dfrac{1}{10} |u_n - L|$ donc

$$|u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{10} |u_n - L| \leqslant \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^{n+1}}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0 \leqslant |u_n - L| \leqslant \dfrac{1}{10^n}$ et la suite $\left(\dfrac{1}{10^n}\right)_n$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - L| = 0$, c'est-à-dire $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} L$ (la distance entre u_n et $\sqrt{3}$ tend vers 0)

(c) Il suffit de demander que $\dfrac{1}{10^n} \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $|u_n - L| \leqslant \dfrac{1}{10^n} \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$\frac{1}{10^n} \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow 10^{-n} \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow -n \leqslant -9 \Leftrightarrow n \geqslant 9$$

On en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 9.

(d) On a $\alpha \simeq u_9 \pm 10^{-9}$. En utilisant le code suivant dans le tableur.

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	3
4	n=1	=4-ln(B3)/4
	⋮	⋮
10	n=9	=4-ln(B10)/4

, on obtient u_9, ce qui nous donne $\alpha \simeq 3,674636449 \pm 10^{-9}$ (on conserve 9 décimales)

correction de l'exercice 7

1. Existence et unicité de la solution de (E) sur $\mathbb{R}_-$:
On introduit la fonction g (puisque le nom f est déjà pris dans la question 2) définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - (3+2x)$ et l'équation (E) est équivalente à l'équation $g(x) = 0$.
Justifions que la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur un intervalle à expliciter.
Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (addition de fonctions dérivables de référence) et sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 2$. Sur $\mathbb{R}_-$, $e^x \leqslant 1$ ($x \leqslant 0$ donc $e^x \leqslant e^0 = 1$) donc $g'(x) \leqslant 1 - 2 = -1 < 0$ ce qui implique que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et comme elle est continue, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $f(\mathbb{R}_-)$.
Puisque $g(0) = e^0 - (3 + 2\times 0) = -2$ et

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty}(3+2x) = 0 - (-\infty) = +\infty,$$

on en déduit que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $[-2,+\infty[$. Comme $0 \in [-2,+\infty[$, on est assuré que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une solution sur $\mathbb{R}_-$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g) donc l'équation (E) admet une et une seule solution.
$-2 < \alpha < -1$:Pour cela, on compare les images par g (puisque α est solution de l'équation $g(x) = 0$). On a :

$$\begin{aligned} g(-2) &= e^{-2} - (3 + 2\times(-2)) = e^{-2} + 1 > 0 \\ g(\alpha) &= 0 \qquad (\alpha \text{ est solution de } g(x) = 0) \\ g(-1) &= e^{-1} - (3 + 2\times(-1)) = e^{-1} - 1 < 0 \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire $g(-1) < g(\alpha) < g(-2)$ et comme la fonction g est bijective et strictement décroissante, on en déduit que $-2 < \alpha < -1$.
$\alpha = \dfrac{e^\alpha - 3}{2}$: Puisque α est solution de (E), on a :

$$e^\alpha = 3 + 2\alpha \Leftrightarrow e^\alpha - 3 = 2\alpha \Leftrightarrow \frac{e^\alpha - 3}{2} = \alpha$$

2. (a) $f(]-\infty,0]) \subset]-\infty,0]$: La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque e^x l'est) donc son tableau de variation est donné par :

x	$-\infty$		0
$f(x)$	$-3/2$	$\nearrow$	-1

ce qui implique que $f(]-\infty,0]) =]-\frac{3}{2},-1] \subset]-\infty,0]$
$\forall x \in]-\infty,0], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$: La dérivée de f est donnée par :

$$\forall x \in]-\infty,0], \quad f'(x) = \frac{e^x}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\infty,0], \quad 0 < f'(x) \leqslant \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

(une exponentielle est toujours strictement positive) donc la distance de $f'(x)$ est moindre que la distance de $\frac{1}{2}$ à 0 ce qui implique que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

(b) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in]-\infty,0]$
Initialisation : $u_0 = -1 \in]-\infty,0]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in]-\infty,0]$ donc $f(u_n) \in]-\infty,0]$ (par stabilité de $]-\infty,0]$ par f, d'après la question 2.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in]-\infty,0]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$: La question 1.c) permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :

$$\forall x,y \in]-\infty,0], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $]-\infty,0]$) et $y = \alpha$ (qui appartient aussi à $]-\infty,0]$ d'après la question 1.a)) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

$|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ ".

Initialisation : $|u_0-\alpha| = |-1-\alpha| \leqslant 1$ (puisque $\alpha \in [-2,-1]$, la distance entre α et -1 ne peut excéder la distance entre -2 et -1 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\frac{1}{2^0} = 1$, on en déduit que $|u_0-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^0}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et nous avons montré précédemment l'inégalité $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$ donc

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0 \leqslant |u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et la suite $(\frac{1}{2^n})_n$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| = 0$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$ (la distance entre u_n et α tend vers 0)

(e) Il suffit de demander que $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow n\ln(\frac{1}{2}) \leqslant -9\ln 10 \underset{\ln(\frac{1}{2})\leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{9\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})}$$

Puisque $-\frac{9\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})} \simeq 29.90 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 30.

On a $\alpha \simeq u_{30} \pm 10^{-9}$. En utilisant le code suivant dans le tableur.

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	-1
4	n=1	=(exp(B3)-3)/2
	⋮	⋮
33	n=30	=(exp(B32)-3)/2

, on obtient u_{30}, ce qui nous donne $\alpha \simeq -1,373374545 \pm 10^{-9}$ (on conserve 9 décimales)

correction de l'exercice 8

1. On introduit la fonction $g(x) = x-(2-2e^{-x}) = x-2+2e^{-x}$ (puisque le nom f est déjà pris dans la question 2). L'équation $x = 2-2e^{-x}$ est alors équivalente à l'équation $g(x)=0$.
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions dérivables de référence) et sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 1-2e^{-x}$. Déterminons le signe de g sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &< 0 \Leftrightarrow 1-2e^{-x} < 0 \Leftrightarrow 1 < 2e^{-x} \Leftrightarrow \ln 1 < \ln(2e^{-x}) \\ &\Leftrightarrow 0 < \ln(2) + \ln e^{-x} = \ln 2 - x \Leftrightarrow x < \ln 2 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\underbrace{\ln 2 - 1}_{<0}$	↗	$+\infty$

Calcul $g(\ln 2)$: $g(\ln 2) = \ln 2 - 2 + 2e^{-\ln 2} = \ln 2 - 2 + \frac{2}{e^{\ln 2}} = \ln 2 - 2 + \frac{2}{2} = \ln 2 - 1 < 0$

Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$: lorsque $x \to -\infty$, $x \to -\infty$ (sic) et $e^{-x} \to +\infty$, à priori, l'exponentielle impose sa limite. Justifions proprement cette intuition. On a :

$$g(x) = 2e^{-x}(\frac{x}{2e^{-x}} - \frac{2}{e^{-x}} + 1) = \underbrace{2e^{-x}}_{\to+\infty}(\underbrace{\frac{xe^x}{2}}_{\to 0} - \underbrace{2e^x}_{\to 0} + 1)$$

donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Calcul de $\lim_{x\to+\infty} g(x)$: Puisque $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a directement $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Justification de l'existence de deux solutions : La fonction g admet une dérivée strictement négative sur $]-\infty, \ln 2]$ sauf en $\ln 2$ et comme elle est dérivable sur cet intervalle, elle est strictement décroissante sur $]-\infty, \ln 2]$. En outre, elle y est continue donc elle réalise une bijection de $]-\infty, \ln 2]$ sur $[\ln 2 - 1, +\infty[$. Puisque $0 \in [\ln 2 - 1, +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur l'intervalle $]-\infty, \ln 2]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g).
D'autre part, la fonction g admet une dérivée strictement positive sur $[\ln 2, +\infty[$ sauf en $\ln 2$ et comme elle est dérivable sur cet intervalle, elle est strictement décroissante sur $[\ln 2, +\infty[$. En outre, elle y est continue donc elle réalise une bijection de $[\ln 2, +\infty[$ sur $[\ln 2 - 1, +\infty[$. Puisque $0 \in [\ln 2 - 1, +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g)
En conclusion, l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions q et $r$sur $\mathbb{R}$, l'une, q, étant strictement inférieure à $\ln 2$ et l'autre, r, strictement supérieure à $\ln 2$.
Justifions que la solution q est en fait négative (au sens large), ce qui démontrera l'unicité de la solution strictement positive. Il s'agit donc de comparer q et 0. Pour cela, on calcule les images : $g(q) = 0$ (puisque q est solution de $g(x) = 0$) et $g(0) = 0 - 2 + 2 = 0$ donc $g(q) = g(0)$ et comme 0 et q appartiennent à $]-\infty, \ln 2]$ et que g est bijective sur cette intervalle, on obtient que $q = 0$
$1.2 \leqslant r \leqslant 2$: On compare les images.

$$\begin{aligned}
g(1.2) &= 1.2 - 2 + 2.e^{1.2} \simeq -0.8 + 0.60 \pm 10^{-2} \simeq -0.20 \pm 10^{-2} < 0 \\
g(r) &= 0 \qquad (r \text{ est solution de } g(x) = 0) \\
g(2) &= 2 - 2 + 2e^{-2} = 2e^{-2} > 0
\end{aligned}$$

ce qui montre que : $g(1.2) < g(r) < g(2)$ et comme la fonction g est strictement croissante sur $[\ln 2, +\infty[$, on en déduit que $1.2 < r < 2$.

2. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme addition de fonctions dérivables de référence) et sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\exp(-x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1, r]$. Par conséquent, le tableau de variations de f est

x	1		r
$f(x)$	$2(1-e^{-1})$	$\nearrow$	r

(en effet, r est solution de l'équation $x = 2 - 2e^{-x}$ donc $r = 2 - 2e^{-r} \Leftrightarrow r = f(r)$) ce qui implique que $f([1, r]) = [2(1 - e^{-1}), r]$ et comme $2(1 - e^{-1}) \simeq 1.26 \pm 10^{-2}$, on en déduit que $f([1, r]) \subset [1, r]$
Détermination du signe de $f(x) - x$ sur $[1, r]$: pour commencer, remarquons que $f(x) - x = -g(x)$. L'intervalle $[1, r]$ est inclu dans l'intervalle $[\ln 2, +\infty[$ donc le tableau de variations de g sur $[1, r]$ est donné par :

x	1		r
$g(x)$	$\underbrace{-1+2e^{-1}}_{<0}$	$\nearrow$	0

donc g est négative sur $[1, r]$, ce qui implique que la fonction $f(x) - x$ est positive sur $[1, r]$

(b) $u_n \in [1, r]$: On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [1, r]$
Initialisation : $u_0 = 1 \in [1, r]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [1, r]$ donc $f(u_n) \in [1, r]$ (par stabilité de $[1, r]$ par f, d'après la question 2.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [1, r]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.
Monotonie de u : On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et comme $u_n \in [1, r]$ et que $f(x) - x \geqslant 0$ sur cet intervalle, on en déduit que $f(u_n) - u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ce qui implique la croissance de la suite u.

(c) La suite u est croissante et majorée par r (car $u_n \in [1, r]$) donc elle converge. On note L sa limite. Ensuite, par construction, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2(1 - \exp(-u_n))$ donc en passant à la limite, on a

$$L = 2(1 - \exp(-L)) \Leftrightarrow L = f(L) \Leftrightarrow g(L) = 0$$

Par conséquent, la limite L de la suite u est une solution de l'équation $g(x) = 0$ et comme $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, r]$, on en déduit que $L \in [1, r]$. Ainsi, L appartient à l'intervalle $[1, r] \subset]0, +\infty[$ et est solution de l'équation $g(x) = 0$. A la question 1. nous avons montré que la seule solution strictement positive de l'équation $g(x) = 0$ est r donc $L = r$ et la suite u converge vers r.

3. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2e^{-x}$. Lorsque $x \in [1, r]$, on a

$$\begin{aligned} 1 \quad &\leqslant \quad x \leqslant r \Rightarrow -r \leqslant -x \leqslant -1 \Rightarrow \exp(-r) \leqslant \exp(-x) \leqslant \exp(-1) \\ &\Rightarrow \quad \underbrace{2\exp(-r)}_{>0} \leqslant f'(x) \leqslant 2\exp(-1) = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $x \in [1, r]$, la distance entre $f'(x)$ et 0 est moindre que la distance de $\frac{2}{e}$ à 0, c'est-à-dire à $\frac{2}{e}$ donc

$$\forall x \in [1, r], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{2}{e}.$$

La fonction f est dérivable sur $[1, r]$ et l'inégalité précédente permet d'appliquer l'inégalité des acrroissements finis

$$\forall x, y \in [1, r], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{e}|x - y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[1, r]$) et $y = r$ (qui appartient aussi à $[1, r]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - r|.$$

Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - r| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$ ".
Initialisation : $|u_0 - r| = |1 - r| \leqslant 1$ (puisque $r \in [1.2, 2]$, la distance entre 1 et r ne peut excéder la distance entre 1.2 et 2 donc elle est moindre que 0.8 donc moindre que 1). Ensuite $\left(\frac{2}{e}\right)^0 = 1$, on en déduit que $|u_0 - r| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^0$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - r| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$ et nous avons montré précédemment l'inégalité $|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - r|$ donc

$$|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - r| \leqslant \frac{2}{e} \times \left(\frac{2}{e}\right)^n = \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) Il suffit de demander que $\left(\frac{2}{e}\right)^n \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $|u_n - r| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$(\frac{2}{e})^n \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow n\ln(\frac{2}{e}) \leqslant -9\ln 10 \underset{\ln(\frac{2}{e}) \leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{9\ln 10}{\ln(\frac{2}{e})}$$

Puisque $-\frac{9\ln 10}{\ln\left(\frac{2}{e}\right)} \simeq 67.53 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 68.

On a $r \simeq u_{68} \pm 10^{-9}$. En utilisant le code suivant dans le tableur.

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	1
4	n=1	=2–2*exp(-B3)
5	n=2	=2-2*exp(-B4)
	⋮	⋮
71	n=68	=2-2*exp(-B70)

, on obtient u_{68}, ce qui nous donne $r \simeq 1,593624260 \pm 10^{-9}$ (on conserve 9 décimales)

correction de l'exercice 9

1. On introduit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. L'équation (E) est donc équivalente à l'équation $f(x) = 0$. La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

Il s'agit d'un trinôme dont les racines sont -1 et 1. On en déduit immédiatement le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est strictement croissante et continue sur $]-\infty,-1]$ (la fonction est dérivable sur l'intervalle et sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle sauf en -1) donc elle réalise une bijection de $]-\infty,-1]$ sur $]-\infty,3]$. Puisque $0\in]-\infty,3]$, l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution sur $]-\infty,-1]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $]-\infty,-1]$). On la note α.
La fonction f est strictement croissante et continue sur $[-1,1]$ (la fonction est dérivable sur l'intervalle et sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle sauf en -1 et 1) donc elle réalise une bijection de $[-1,1]$ sur $[-1,3]$. Puisque $0\in[-1,3]$, l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution sur $[-1,1]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $[-1,1]$). On la note β.
La fonction f est strictement croissante et continue sur $[1,+\infty]$ (la fonction est dérivable sur l'intervalle et sa dérivée est strictement positive sur cet intervalle sauf en 1) donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]-1,+\infty]$. Puisque $0\in]-1,+\infty]$, l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution sur $[1,+\infty[$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $[1,+\infty[$). On la note γ.
Par conséquent, l'équation $f(x)=0$ admet trois solutions α, β, γ sur $\mathbb{R}$ avec $\alpha<-1$, $-1<\beta<1$ et $1<\gamma$, c'est-à-dire

$$\alpha<-1<\beta<1<\gamma$$

2. (a) On compare les images par f (puisque β est solution de l'équation $f(x)=0$

$$f(0)=1, \qquad f(\beta)=0, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$$

donc $f(\frac{1}{2})\leqslant f(\beta)\leqslant f(0)$. La fonction f étant bijective et strictement décroissante sur $[-1,1]$, on en déduit que $0\leqslant\beta\leqslant\frac{1}{2}$.
Le réel β est solution de l'équation $x^3-3x+1=0$ donc

$$\beta^3-3\beta+1=0\Leftrightarrow\beta^3+1=3\beta\Leftrightarrow\frac{\beta^3+1}{3}=\beta$$

donc β est solution de l'équation $\dfrac{x^3+1}{3}=x$.

(b) Le tableau de variation de g sur $[0,\frac{1}{2}]$ est

x	0		$1/2$
$g(x)$	$1/3$	$\nearrow$	$3/8$

donc $g\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left[\frac{1}{3},\frac{3}{8}\right]\subset\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
La dérivée de g est donnée par $g'(x)=x^2$ donc $\forall x\in[0,\frac{1}{2}],\quad 0\leqslant g'(x)\leqslant\frac{1}{4}$ (encadrement élémentaire). Par conséquent,

$$\forall x\in[0,\frac{1}{2}], \qquad |g'(x)|\leqslant\frac{1}{4}$$

(la distance de $g'(x)$ à 0 est moindre que la distance de 0 à $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{4}$).

(c) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n): u_n\in[0,\frac{1}{2}]$

Initialisation : $u_0=0\in[0,\frac{1}{2}]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n\in[0,\frac{1}{2}]$ donc $f(u_n)\in[0,\frac{1}{2}]$ (par stabilité de $[0,\frac{1}{2}]$ par f, d'après la question 2.a)) donc $u_{n+1}=f(u_n)\in[0,\frac{1}{2}]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) $|u_{n+1}-\beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\beta|$: La fonction f est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et l'inégalité de la question 2.bp permet d'appliquer l'inégalité des acrroissements finis

$$\forall x, y \in [0, \frac{1}{2}], \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x-y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[0, \frac{1}{2}]$) et $y = \beta$ (qui appartient aussi à $[0, \frac{1}{2}]$) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-\beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\beta|.$$

$|u_n-\beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$: Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n-\beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$ ".

Initialisation : $|u_0-\beta| = |0-\beta| \leqslant \frac{1}{2}$ (puisque $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$, la distance entre 0 et β ne peut excéder la distance entre 0 et $\frac{1}{2}$ donc elle est moindre que $\frac{1}{2}$). Ensuite $\frac{1}{4^0} \times \frac{1}{2} = 1$, on en déduit que $|u_0-\beta| \leqslant \frac{1}{4^0} \times \frac{1}{2}$ ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n-\beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$ et nous avons montré précédemment l'inégalité $|u_{n+1}-\beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\beta|$ donc

$$|u_{n+1}-\beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n-\beta| \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{1}{2}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(e) Il suffit de demander que $\frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $|u_n-\beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} &\leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow \ln(\frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}) \leqslant -9\ln 10 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant -9\ln 10 \\
n\ln\left(\frac{1}{4}\right) &\leqslant -9\ln 10 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \underset{\ln(\frac{1}{4}) \leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant \frac{-9\ln 10 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}
\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{-9\ln 10 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \simeq 14.45 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 15.

On a $\beta \simeq u_{15} \pm 10^{-9}$. En utilisant le code suivant dans le tableur.

	A	B
1	n	u
2		
3	n=0	-1
4	n=1	=(1/3)*((B3)^3+1)
5	n=2	=(1/3)*((B4)^3+1)
	⋮	⋮
18	n=15	=(1/3)*((B17)^3+1)

, on obtient u_{15}, ce qui nous donne $\beta \simeq 0,347296355 \pm 10^{-9}$ (on conserve 9 décimales)