correction de l'exercice 1

1. (a) Le calcul ci-dessous montre f' est posifive sur $[0,1]$ donc la fonction f est croissante sur $[0,1]$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x+10) - e^x}{(x+10)^2} = \frac{e^x(x+9)}{(x+10)^2}.$$

(b) Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^x(x+9))'(x+10)^2 - (e^x(x+9))2(x+10)}{(x+10)^4} = \frac{(e^x(x+9))'(x+10) - 2e^x(x+9)}{(x+10)^3} \\ &= \frac{(e^x(x+9)+e^x)(x+10) - 2e^x(x+9)}{(x+10)^3} = e^x\frac{(x+9+1)(x+10) - 2(x+9)}{(x+10)^3} \\ &= e^x\frac{x^2+18x+82}{(x+10)^3} \end{aligned}$$

La fonction f'' est donc positive sur $[0,1]$, ce qui implique que la fonction f' est croissante sur $[0,1]$ donc

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1) \Leftrightarrow 0.09 = \frac{9}{100} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{10e}{121} \leqslant 0.225$$

(c) On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ et, d'après l'encadrement de la question 1.b), on a

$$\forall x \in [0,1], \quad g'(x) = f'(x) - 1 < 0$$

ce qui implique que la fonction g est strictement décroissante sur $[0,1]$. Par conséquent, la fonction g est continue (car dérivable) sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $g([0,1]) = [g(1), g(0)]$. Puisque

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) = \frac{1}{10} > 0 \quad \text{et} \quad g(1) = f(1) - 1 = \frac{e}{11} - 1 \simeq -0.75 \pm 10^{-2} < 0,$$

on en déduit que $0 \in g([0,1])$ donc l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $[0,1]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g sur $[0,1]$)

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) \geqslant g(1) \Leftrightarrow f(x) - x \geqslant f(1) - 1 = \frac{e}{11} - 1$$

(d) La fonction g est strictement décroissante sur $[0,1]$ donc sur $[0,\alpha]$, ce qui implique que

$$\forall x \in [0,\alpha], \quad g(x) \geqslant g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x \geqslant 0$$

2. (a) Il s'agit de montrer que l'intervalle $[0,\alpha]$ est stable par f. Puisque f est croissante sur $[0,1]$ donc sur $[0,\alpha]$, on en déduit que

$$f([0,\alpha]) = [f(0), f(\alpha)] = \left[\frac{1}{10}, \alpha\right] \subset [0,\alpha]$$

Procédons maintenant par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0,\alpha]$.
Initialisation $n = 0$: $u_0 = 0 \in [0,\alpha]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, c'est-à-dire supposons que $u_n \in [0,\alpha]$ et montrons que $u_{n+1} \in [0,\alpha]$. Puisque $u_n \in [0,\alpha]$, $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,\alpha]) \subset [0,\alpha]$ donc $u_{n+1} \in [0,\alpha]$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) D'après la question 1.d) $\forall x \in [0,\alpha], \quad f(x) - x \geqslant 0$ et d'après la question 2.a) $u_n \in [0,\alpha]$, donc on peut poser $x = u_n$, ce qui montre que

$$f(u_n) - u_n \geqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) La suite u est croissante et majorée par 1 donc elle converge. On note L la limite, cette limite appartient à $[0,1]$. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ (la fonction f étant continue sur $[0,1]$), on obtient $L = f(L)$. La question 1.c) montre que cette équation n'admet que α pour solution sur $[0,1]$ donc $L = \alpha$.

(d) La question 1.b) montre que $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leqslant 0.025$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité des accroissements finis (la fonction f étant C^1 sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions C^1 sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$) donc

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant 0.225\,|x - y|$$

Puisque $u_n \in [0,1]$ (question 2.a)), $\alpha \in [0,1]$ (question 1.c)), $u_{n+1} = f(u_n)$ et que $f(\alpha) = \alpha$ (par définition de α),on en déduit que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.225\,|u_n - \alpha|$.

(e) L'inégalité précédente montre, par une récurrence donnée en fin de question, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (0.225)^n |u_0 - \alpha| = (0.225)^n |0 - \alpha| = (0.225)^n \alpha \leqslant (0.225)^n$$

En suite, il suffit de choisir n tel que

$$(0.225)^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow n \ln(0.225) \leqslant -3 \ln 10 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{-3 \ln 10}{\ln 0.225} \simeq 4.63 \pm 10^{-2} \Leftrightarrow n \geqslant 5$$

donc $|u_5 - \alpha| \leqslant (0.225)^5 \leqslant 10^{-5}$.
Preuve : On pose $(\mathcal{P}_n)$: $|u_n - \alpha| \leqslant (0.225)^n |u_0 - \alpha|$
Initialisation : $(\mathcal{P}_0)$ est vraie car $(0.225)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| \geqslant |u_0 - \alpha|$
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $|u_n - \alpha| \leqslant (0.225)^n |u_0 - \alpha|$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant (0.225)^{n+1} |u_0 - \alpha|$.
D'après la question 2.d), on a

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0.225 |u_n - \alpha| \leqslant 0.225(0.225)^n |u_0 - \alpha| = (0.225)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

correction de l'exercice 2

1. (a) La dérivée de g est $g'(x) = 3x^2 - 6x - 4$ dont les racines sont $\alpha = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{21} < 0$ et $\beta = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{21} > 0$. On en déduit le tableau de variation de g

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(\alpha) > 0$	$\searrow$	$g(\beta) < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, elle est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty, \alpha]$ sur $]-\infty, g(\alpha)]$. Puisque $0 \in]-\infty, g(\alpha)]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique racine $x_1 \in]-\infty, \alpha]$. On procède de même sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (ce qui donne x_2) et sur $[\beta, +\infty[$ (ce qui donne x_3). Ainsi, l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.

(b) Puisque la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1, 2] \subset [\alpha, \beta]$ et que $g(1) = 2 > g(x_2) = 0 > g(2) = -4$,on en déduit que $1 < x_2 < 2$.

2. (a) Puisque x_2 est solution de l'équation $g(x) = 0$, on a montrer que cette équation est équivalente à $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left(x^3 - 3x^2 + 2x + 8\right) = x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + 8 = 6x \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \end{aligned}$$

(b) Il est indispensable de dresser le tableau de variation de f sur $[1, 2]$. La dérivée de f est $f'(x) = \frac{1}{6}\left(3x^2 - 6x + 2\right)$ dont les racines sont $\gamma = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ et $\delta = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1$

x	1		$1 < \delta < 2$		2
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$f(\gamma)$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

donc $f([1, 2]) = \left[f(\gamma), \frac{4}{3}\right] \subset [1, 2]$ car $1 \leqslant \frac{4}{3} \leqslant 2$ et $1 \leqslant f(\gamma) \leqslant 2$.

(c) Un encadrement directement de $f'(x)$ ne montre pas que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{3}$ (ce qui sera utile à la question 2.d)).On va donc étudier les variations de f' sur $[1, 2]$. La dérivée de f' est $f''(x) = x - 1$ qui est positive $[1, 2]$ donc f' est croissante sur $[1, 2]$ et

$$\forall x \in [1, 2], \quad -\frac{1}{6} = f'(1) \leqslant f'(x) \leqslant f'(2) = \frac{1}{3}.$$

(d) Puisque lorsque $x \in [1,2]$, $f'(x) \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$, on en déduit que la distance de $f'(x)$ à 0 est moindre que $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire

$$\forall x \in [1,2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{3}.$$

L'inégalité précédente, combiné au fait que la fonction f étant dérivable sur $[1,2]$, que $x_2 \in [1,2]$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis, ce qui nous donne

$$\forall x \in [1,2]\,, \quad |f(x) - f(x_2)| \leqslant \frac{1}{3}|x - x_2|\,.$$

3. Montrons pour commencer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$. Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $u_n \in [1,2]$ ".
Initialisation : $u_0 = 1 \in [1;2]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [1.2]$ donc $f(u_n) \in [1,2]$ (par stabilité de $[1,2]$ par f) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [1,2]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.
On peut appliquer l'inégalité obtenue à la question 2.d au point $x = u_n$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x_2) = x_2$, on en déduit que

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - x_2| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - x_2|\,.$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - x_2| \leqslant \frac{1}{3^n}|1 - x_2|$. Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - x_2| \leqslant \frac{1}{3^n}|1 - x_2|$ ".
Initialisation : $|u_0 - x_2| = |1 - x_2| = \frac{1}{3^0}|1 - x_2|$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $\frac{1}{3^n}|1 - x_2|$ et l'inégalité (1) nous fournit l'inégalité

$$|u_{n+1} - x_2| \leqslant \frac{1}{3}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n}|1 - x_2| = \frac{1}{3^{n+1}}|1 - x_2|\,,$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.
La suite $|u_n - x_2|$ est positive et majorée par la suite $(\frac{1}{3^n}|1 - x_2|)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0 (car il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$). Le théorème d'encadrement montre que $|u_n - x_2|$ converge vers 0, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_2$.

correction de l'exercice 3

1. (a) Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\forall x > 0$, $e^x - 1 \neq 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\forall x > 0$, $f'(x) = -\frac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1)^2}$.

(b) De même, on montre que f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et l'on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) = \left(-\frac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1)^2}\right)' = -\frac{(xe^x - e^x + 1)'(e^x - 1)^2 - (xe^x - e^x + 1)[(e^x - 1)^2]'}{(e^x - 1)^4} \\ &= -\frac{xe^x(e^x - 1)^2 - (xe^x - e^x + 1)2e^x(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4} = e^x(e^x - 1)\frac{(x - 2e^x + xe^x + 2)}{(e^x - 1)^4} \\ &= \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2) \end{aligned}$$

(c) La fonction g est dérivable et sa dérivée vaut $g'(x) = -e^x + xe^x + 1$. On ne peut étudier son signe, donc on étudie ses variations.
La fonction g' est dérivable et sa dérivée vaut $g''(x) = xe^x > 0$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$.
Puisque $g'(0) = 0$, on en déduit que $g' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ et comme $g(0) = 0$, on en déduit que $g > 0$ sur $\mathbb{R}_+^\times$, ce que l'on visualise mieux grâce au tableau de variation suivant

x	0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	
$g'(x)$	0	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

En outre, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^x - 1$ sont positives sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction f'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\times$.

(d) La fonction f'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$. Puisque l'on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$ et

$$f'(x) = -\frac{xe^x}{(e^x)^2}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}e^{-x}\right)}{(1-e^{-x})^2} = -xe^{-x}\frac{\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}e^{-x}\right)}{(1-e^{-x})^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

(par les croissances comparées), on en déduit que $f' < 0$ sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$. On achève l'étude en remarquant que

$$f(x) = \frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{e^x}\times\frac{1}{1-e^{-x}} = xe^{-x}\times\frac{1}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

(toujours par les croissances comparées). On en déduit le tableau de variation de f

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$-1/2$	$\nearrow$	0
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

2. (a) Le tableau de variation de f montre que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant 0$ donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

(b) Puisque l'on a $x > 0$, on a

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x-1} = x \Leftrightarrow \frac{1}{1-e^x} = 1 \Leftrightarrow 1 = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

(c) On constate que $\mathbb{R}_+^\times$ est un intervalle stable par f (cf. tableau de variation) et $u_0 \in \mathbb{R}_+$ donc une récurrence montre immédiatement que $\forall n \geqslant 0,\quad u_n \in \mathbb{R}_+^\times$ (je la laisse au lecteur).
La question 2,a) nous permet d'appliquer l'inégalité des accroissements finis

$$\forall x, y > 0,\quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$$

En choisissant avec $x = u_n > 0$ et $y = \ln 2 > 0$, tout en n'oubliant pas que $f(\ln 2) = \ln 2$ (puisque $\ln 2$ est solution de $f(x) = x$), on obtient

$$|f(u_n) - f(\ln 2)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|$$

(d) On introduit l'hyposède de récurrence $(\mathcal{H}_n) : |u_n - \ln 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)|1-\ln 2|$

Initialisation : $(\mathcal{H}_0)$ est vraie car $|u_0 - \ln 2| = 1 - \ln 2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 |1-\ln 2|$.

Hérédité : supposons que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie. On a $|u_n - \ln 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |1-\ln 2|$ et $|u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$ donc $|u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n |1-\ln 2| = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}|1-\ln 2|$, ce qui implique que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie et termine la récurrence.
La suite $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n |1-\ln 2|$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$ donc elle tend vers 0.
L'inégalité $\forall n \geqslant 0,\quad 0 \leqslant |u_n - \ln 2| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |1-\ln 2|$ combinée au théorème d'encadrement montre que la suite $|u_n - \ln 2|$ tend vers 0 donc la suite u tend vers $\ln 2$.