correction de l'exercice 1

1. On introduit naturellement la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ et l'on a
$$\frac{x^3}{x^2+1} = n \Leftrightarrow f(x) = n$$
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, puisqu'il s'agit de la somme d'un réel strictement positif et d'un réel positif)
Pour expliciter la monotonie de f sur $\mathbb{R}$, nous allons déterminer le signe de sa dérivée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (reprendre l'argumentaire sur la continuité et remplacer "continue" par "dérivable") et l'on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$
Par conséquent,$f' > 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et la fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (limite du quotient de deux polynômes en l'infini), on peut affirmer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout entier n, $n \in \mathbb{R}$ (image de $\mathbb{R}$ par f) donc l'équation $f(x) = n$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent de n par f), ce qui est équivalent au fait que l'équation $(E_n) : \dfrac{x^3}{x^2+1} = n$ admette une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.

2. **Première méthode** : Il s'agit de comparer x_n et x_{n+1}. Nous allons donc comparer leurs images $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. Par définition, $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$ (x_n est solution de l'équation $f(x) = n$) donc
$$f(x_n) \leqslant f(x_{n+1})$$
La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective sur $\mathbb{R}$ et comme x_n et x_{n+1} appartiennent à $\mathbb{R}$, nous obtenons que $x_n \leqslant x_{n+1}$ et la suite $(x_n)_n$ est croissante
Seconde méthode : Par définition de x_n et de la réciproque, on a $f(x_n) = n \Leftrightarrow x_n = f^{-1}(n)$. La fonctions f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sa réciproque est strictement croissante sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc la suite $x_n = f^{-1}(n)$ est croissante.

3. On compare de nouveau les images de n, x_n et $n+1$ par f. On a :
$$f(n) = \frac{n^3}{n^2+1}, \quad f(x_n) = n, \quad f(n+1) = \frac{(n+1)^3}{(n+1)^2+1}$$
Comparaison de $f(n)$ et de $f(x_n)$: pour cela, on étudie le signe de la différence $f(n) - f(x_n)$
$$f(n) - f(x_n) = \frac{n^3}{n^2+1} - n = \frac{n^3 - n(n^2+1)}{n^2+1} = -\frac{n}{n^2+1} \leqslant 0$$
donc $f(n) \leqslant f(x_n)$.
Comparaison de $f(x_n)$ et $f(n+1)$: pour cela, on étudie le signe de la différence $f(x_n) - f(n+1)$
$$f(x_n) - f(n+1) = n - \frac{(n+1)^3}{(n+1)^2+1} = \frac{n[(n+1)^2+1] - (n+1)^3}{(n+1)^2+1} = \frac{-n^2-n-1}{(n+1)^2+1} \leqslant 0$$
donc $f(x_n) \leqslant f(n+1)$.
Par conséquent, nous avons
$$f(n) \leqslant f(x_n) \leqslant f(n+1)$$
La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective sur $\mathbb{R}$ et comme n, x_n et $n+1$ appartiennent à $\mathbb{R}$, on en déduit que
$$n \leqslant x_n \leqslant n+1$$

4. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, l'encadrement précédent combiné au théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
Ensuite, le membre de gauche n et le membre de droite $n+1$ possède exactement le même équivalent, n en l'occurence, donc on a l'intuition (mais pas la preuve) que l'équivalent de x_n est n. Pour justifier proprement cette intuition, on divise de part et d'autre de l'encadrement par l'équivalent, ici n, et l'on a
$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant \frac{x_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, l'encadrement précédent combiné au théorème d'encadrement montre que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$, ce qui signifie que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ ($u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$)

correction de l'exercice 2

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)
   Pour étudier les variations de f, nous allons étudier le signe de sa dérivée. Pour commencer, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (raisonnement identique au précédent en remplaçant "continu" par "dérivable") et l'on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$$
   ce qui implique que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Par conséquent, le théorème de bijection s'applique et f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
   $\lim_{x\to-\infty} f(x)$: lorsque $x \to -\infty$, $e^x \to 0$ et $e^{-x} \to +\infty$ donc e^{-x} domine e^x en $-\infty$ et l'on peut écrire
   $$f(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \underset{x\to-\infty}{\to} \frac{-1}{1} = -1$$
   $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: lorsque $x \to +\infty$, $e^x \to +\infty$ et $e^{-x} \to 0$ donc e^x domine e^{-x} en $+\infty$ et l'on peut écrire
   $$f(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x} + 1)} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x\to-\infty}{\to} \frac{1}{1} = 1$$
   Par conséquent, la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

2. La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n} \in]-1, 1[$ (image de $\mathbb{R}$ par f) donc l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent de $\frac{1}{n}$ par f).

3. <u>$0 \leqslant x_n$</u> : Il s'agit de comparer x_n et 0 donc on compare leurs images. On a : $f(x_n) = \frac{1}{n}$ (puisque x_n est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$) et $f(0) = 0$ donc
   $$f(0) \leqslant f(x_n).$$
   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective sur $\mathbb{R}$ et comme 0 et x_n appartiennent à $\mathbb{R}$, on a donc $0 \leqslant x_n$.
   <u>Monotonie de $(x_n)_n$</u> :
   Première méthode : Il s'agit de comparer x_n et x_{n+1} donc on compare leurs images. On a : $f(x_n) = \frac{1}{n}$ (puisque x_n est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$) et $f(x_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ donc
   $$f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n).$$
   La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective sur $\mathbb{R}$ et comme x_n et x_{n+1} appartiennent à $\mathbb{R}$, on a donc $x_{n+1} \leqslant x_n$ et la suite $(x_n)_n$ est décroissante.
   Seconde méthode : Par définition de x_n et de la réciproque, on a $f(x_n) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$. La fonctions f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sa réciproque est strictement croissante sur $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$ et la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est décroissante donc la suite $x_n = f^{-1}(n)$ est décroissante.

4. La suite $(x_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel L
   Puisque x_n est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$, on a $\frac{e^{x_n} - e^{-x_n}}{e^{x_n} + e^{-x_n}} = \frac{1}{n}$. En passant à la limite, on obtient :
   $$\frac{e^L - e^{-L}}{e^L + e^{-L}} = 0 \Leftrightarrow e^L - e^{-L} = 0 \Leftrightarrow e^L = e^{-L} \Leftrightarrow L = -L \Leftrightarrow 2L = 0 \Leftrightarrow L = 0$$
   Ainsi la suite $(x_n)_n$ converge vers 0.

correction de l'exercice 3

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (par addition de fonctions continues) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (par addition de fonctions strictement croissantes) donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Je laisse le soin au lecteur de vérifier simplement que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

2. La fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout entier n, $n \in \mathbb{R}$ (image de $\mathbb{R}$ par f) donc l'équation $f(x) = n$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent de n par f).

3. **Première méthode** :Il suffit de comparer les images. On a : $f(x_n) = n$ (x_n est solution de l'équation $f(x) = n$) et $f(x_{n+1}) = n + 1$ donc
$$f(x_n) \leqslant f(x_{n+1})$$
La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective sur $\mathbb{R}$ et comme x_n et x_{n+1} appartiennent à $\mathbb{R}$, on en déduit que $x_n \leqslant x_{n+1}$ donc la suite $(x_n)_n$ est croissante.
Seconde méthode : Par définition de x_n et de la réciproque, on a $f(x_n) = n \Leftrightarrow x_n = f^{-1}(n)$. La fonctions f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sa réciproque est strictement croissante sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc la suite $x_n = f^{-1}(n)$ est croissante.

4. Il s'agit de comparer $\ln(n - \ln n)$, x_n et $\ln n$ donc il suffit de comparer les images. On a :
$$\begin{aligned} f(\ln(n - \ln n)) &= e^{\ln(n-\ln n)} + \ln(n - \ln n) = n - \ln n + \ln(n - \ln n) \\ f(x_n) &= n \qquad (x_n \text{ est solution de l'équation } f(x) = n \\ f(\ln n) &= e^{\ln n} + \ln n = n + \ln n \end{aligned}$$
Il est évident que si $n \geqslant 1$ alors $n + \ln n \geqslant n$ donc $f(x_n) \leqslant f(\ln n)$. Il reste à comparer n à $n - \ln n + \ln(n - \ln n)$
$$n - (n - \ln n + \ln(n - \ln n)) = \ln n - \ln(n - \ln n) = \ln\left(\frac{n}{n - \ln n}\right)$$
Puisque $n - \ln n < n$, on a $\dfrac{n}{n - \ln n} < 1$ donc $\ln\left(\dfrac{n}{n - \ln n}\right) < \ln 1 = 0$ donc $f(\ln(n - \ln n)) \leqslant f(x_n)$.
Par conséquent, nous avons
$$f(\ln(n - \ln n)) \leqslant f(x_n) \leqslant f(\ln n)$$
La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective sur $\mathbb{R}$ et comme $\ln(n - \ln n)$, x_n et $\ln n$ appartiennent à $\mathbb{R}$, nous en déduisons que
$$\ln(n - \ln n) \leqslant x_n \leqslant \ln n$$

5. <u>Limite de x_n</u> : On applique le théorème d'encadrement. Pour commencer, pour déterminer la limite de $n - \ln n$, on remarque que n domine $\ln n$ lorsque $n \to +\infty$ donc on a :
$$n - \ln n = \underbrace{n}_{\to+\infty}\overbrace{(1 - \underbrace{\frac{\ln n}{n}}_{\to 0})}^{\to 1} \to +\infty$$
On en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n-\ln n) = +\infty$ (car $\ln X \underset{X\to+\infty}{\to} +\infty$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ et l'encadrement de la question précédente montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$
<u>$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\ln n}$</u> : Si l'on divise l'encadrement de la question 4 par $\ln n$, on obtient
$$\begin{aligned} \frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} &\leqslant \frac{x_n}{\ln n} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\ln(n[1 - \frac{\ln n}{n}])}{\ln n} \leqslant \frac{x_n}{\ln n} \leqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\ln n + \ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n} \leqslant \frac{x_n}{\ln n} \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{\ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n} \leqslant \frac{x_n}{\ln n} \leqslant 1 \end{aligned}$$
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, le théorème d'encadrement s'applique et il nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\ln n} = 1$ (ce qui implique, en particulier, que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$)

correction de l'exercice 4

1. On introduit naturellement la fonction $f(x) = x \ln x$ et l'on a
$$x \ln x = n \Leftrightarrow f(x) = n$$

La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$ (produit de deux fonctions continues sur $[1,+\infty[$)
Pour expliciter la monotonie de f sur $[1,+\infty[$, nous allons déterminer le signe de sa dérivée. La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ (reprendre l'argumentaire sur la continuité et remplacer "continue" par "dérivable") et l'on a :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f'(x) = \ln x + 1 > 0$$

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
Ainsi, la fonction f est continue sur $[1,+\infty[$, strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) = [0,+\infty[$.
La fonction f est une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ et pour tout entier n, $n \in f([1,+\infty[) = [0,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = n$ admet une et une seule solution sur $[1,+\infty[$ (existence et unicité de l'antécédent de n par f), ce qui est équivalent au fait que l'équation $(E_n) : x\ln x = n$ admette une et une seule solution sur $[1,+\infty[$.

2. Monotonie de x_n :
Première méthode : Il s'agit de comparer x_n et x_{n+1}. Nous allons donc comparer leurs images $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. Par définition, $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$ (x_n est solution de l'équation $f(x) = n$) donc

$$f(x_n) \leqslant f(x_{n+1})$$

La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, bijective sur $\mathbb{R}$ et comme x_n et x_{n+1} appartiennent à $\mathbb{R}$, nous obtenons que $x_n \leqslant x_{n+1}$ et la suite $(x_n)_n$ est croissante
Seconde méthode : Par définition de x_n et de la réciproque, on a $f(x_n) = n \Leftrightarrow x_n = f^{-1}(n)$. La fonctions f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, sa réciproque est strictement croissante sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc la suite $x_n = f^{-1}(n)$ est croissante.
$x_n \leqslant n$: Il s'agit de comparer x_n et n donc on compare leurs images. On a : $f(x_n) = n$ (puisque x_n est solution de l'équation $f(x) = n$) et $f(n) = n\ln n$ donc

$$f(x_n) \leqslant f(n).$$

La fonction f est strictement croissante et bijective sur $[1,+\infty[$ et comme n et x_n appartiennent à $[1,+\infty[$ on a donc $x_n \leqslant n$.

3. Puisque l'on a $f(x_n) = n \Leftrightarrow x_n \ln x_n = n$ et $\ln x_n \leqslant n$, on en déduit que $x_n = \dfrac{n}{\ln x_n} \geqslant \dfrac{n}{\ln n}$.
En utilisant de nouveau l'égalité $x_n = \dfrac{n}{\ln x_n}$ et la minoration précédente, on a $x_n \leqslant \dfrac{n}{\ln\left(\dfrac{n}{\ln n}\right)} = \dfrac{n}{\ln n - \ln(\ln n)}$

4. On a

$$\frac{n}{\ln n} \leqslant x_n \leqslant \frac{n}{\ln n - \ln(\ln n)} \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{(\ln n)x_n}{n} \leqslant \frac{\ln n}{\ln n - \ln(\ln n)} = \frac{\ln n}{\ln n} \times \frac{1}{1 - \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}} \Leftrightarrow 1 \leqslant \frac{(\ln n)x_n}{n} \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \underset{X=\ln x}{=} \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ (croissance comparée), le théorème d'encadrement montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)x_n}{n} = 1$

correction de l'exercice 5

1. On considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n + 1 - nx$. Alors on a :

$$x^n + 1 = nx \Leftrightarrow f_n(x) = 0$$

La fonction f_n est continue sur $[0,1]$ (c'est un polynôme en x) Pour déterminer sa monotonie, on étudier le signe de sa dérivée. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ (c'est un polynôme en x) et l'on a :

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$$

Puisque $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x^{n-1} \leqslant 1$ (la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est croissante sur $[0,1]$), donc $x^{n-1} - 1 \leqslant 0$ sur $[0,1]$, et $n \geqslant 2 \geqslant 0$ ce qui implique que

$$\forall x \in [0,1[, \quad f_n'(x) < 0$$

Par conséquent, la fonction f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$
La fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1]) = [2-n,1]$ (car $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 1^n + 1 - n = 2 - n$).
La fonction f_n est une bijection de $[0,1]$ sur $[2-n,1]$ et, puisque $2 - n \leqslant 0$, $0 \in [2-n,1]$ (image de $[0,1]$ par f_n) donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f_n), ce qui est équivalent à l'existence et l'unicité de la solution sur $[0,1]$ de l'équation $x^n + 1 = nx$.

2. On va comparer les images.par f_n.

$$\begin{array}{rcl} f_n(\frac{1}{n}) & = & (\frac{1}{n})^n - n \times \frac{1}{n} + 1 = (\frac{1}{n})^n \\ f_n(x_n) & = & 0 \qquad (x_n \text{ est solution de l'équation } f_n(x) = 0) \\ f_n(\frac{2}{n}) & = & (\frac{2}{n})^n - n \times \frac{2}{n} + 1 = (\frac{2}{n})^n - 1 \end{array}$$

Il est évident que $f_n(\frac{1}{n}) \geqslant f(x_n)$. D'autre part, puisque $0 \leqslant \frac{2}{n} \leqslant 1$, on a $0 \leqslant (\frac{2}{n})^n \leqslant 1$ donc $(\frac{2}{n})^n - 1 \leqslant 0$, ce qui implique que $f_n(\frac{2}{n}) \leqslant f(x_n)$. On en déduit immédiatement que :

$$f_n(\frac{2}{n}) \leqslant f_n(x_n) \leqslant f_n(\frac{1}{n})$$

La fonction f_n étant strictement décroissante sur $[0,1]$, bijective sur $[0,1]$ et comme $\frac{1}{n}$, x_n et $\frac{2}{n}$ appartiennent à $[0,1]$, on en déduit que :

$$\frac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant \frac{2}{n}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, le théorème d'encadrement permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

3. Puisque x_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$, on peut écrire

$$(x_n)^n + 1 - nx_n = 0 \Leftrightarrow nx_n = (x_n)^n + 1$$

On a bien envie de dire " Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $(x_n)^n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ "
Malheureusement, cet argument n'est pas valide, puisque l'exposant est variable et que le théorème sur les limites de puissances considère uniquement des exposants fixes (indépendant de la variable, ici n). En fait, le bon argument est le suivant :

$$\forall n \geqslant 3, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant \frac{2}{n} \leqslant \frac{2}{3} \Rightarrow 0 \leqslant (x_n)^n \leqslant (\frac{2}{3})^n$$

La suite $(\frac{2}{3})^n$ est géométrique et sa raison $\frac{2}{3}$ appartient à $]-1,1[$ donc la suite $(\frac{2}{3})^n$ tend vers 0 et le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$.

En reprenant l'égalité $nx_n = 1 + (x_n)^n$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$ donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (revoir si nécessaire la définition de deux suites équivalentes)

4. <u>Signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$</u> :

$$\begin{array}{rcl} f_{n+1}(x) - f_n(x) & = & [x^{n+1} + 1 - (n+1)x] - [x^n + 1 - nx] \\ & = & x^{n+1} - x^n - x = x^n(x-1) - x \end{array}$$

Puisque $x \in [0,1]$, $x - 1 \leqslant 0$, $x^n \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$ donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant 0$
<u>Signe de $f_{n+1}(x_n)$</u> : En évaluant l'inégalité précédente en $x = x_n$, on obtient

$$f_{n+1}(x_n) < 0$$

5. Il suffit de comparer x_n et x_{n+1}. Malheureusement, x_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$ et x_{n+1} de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$. Contrairement aux exercices précédents, les fonctions f_n et f_{n+1} sont distinctes et la question naturelle se pose :

$$\boxed{\text{Quelle fonction choisir : } f_n \text{ ou } f_{n+1} \text{ ?}}$$

L'exercice nous aide bien entendu puisque nous connaissons le signe de $f_{n+1}(x_n)$. Dès lors, nous allons comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$. Puisque $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ (x_{n+1} est solution de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$) et $f_{n+1}(x_n) < 0$ (question précédente), on en déduit que

$$f_{n+1}(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_{n+1}).$$

La fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0,1]$, bijective sur $[0,1]$ et comme x_n et x_{n+1} appartiennent à $[0,1]$, on en déduit que $x_n \geqslant x_{n+1}$ donc la suite (x_n) est décroissante.

correction de l'exercice 6

1. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (c'est un polynôme en x). Pour étudier sa monotonie, nous allons étudier le signe de sa dérivée. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est un polynôme en x) et l'on a :
$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^\times =]0, +\infty[$$
(somme de deux nombres strictement positifs). Par conséquent, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+)$.
Puisque $f_n(0) = -4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, on en déduit que f_n réaalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-4, +\infty[$.
La fonction f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-4, +\infty[$ et puisque $0 \in [-4, +\infty[$, on en déduit que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par f sur $\mathbb{R}_+$). En outre, puisque $f_n(0) = -4$, on en déduit que $u_n > 0$.

2. <u>Calcul de u_1</u> : u_1 est l'unique solution strictement positive de
$$f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x + 9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{145}}{18}$$
Puisque $u_1 > 0$, on en déduit que $u_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{145}}{18}$.
<u>Calcul de u_2</u> : u_2 est l'unique solution strictement positive de
$$f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 10x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$
Puisque $u_2 > 0$, on en déduit que $u_2 = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$.
<u>$u_n \in]0, \frac{2}{3}[$</u> : Il s'agit de vérifier que $0 < u_n < \dfrac{2}{3}$. On compare de nouveau les images par f_n (la fonction dont x_n est racine). On a :
$$\begin{array}{rcl} f_n(0) & = & -4 \\ f_n(u_n) & = & 0 \qquad (u_n \text{ est solution de l'équation } f_n(x) = 0) \\ f_n(\frac{2}{3}) & = & (\frac{2}{3})^n + 9(\frac{2}{3})^2 - 4 = (\frac{2}{3})^n \end{array}$$
ce qui nous donne
$$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(\frac{2}{3})$$
La fonction f_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, bijective sur $\mathbb{R}_+$ et comme 0, u_n et $\dfrac{2}{3}$ appartiennent à $\mathbb{R}_+$, on en déduit que
$$0 < u_n < \frac{2}{3}$$

3. Pour cela, on évalue le signe de la différence :
$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = [x^{n+1} + 9x^2 - 4] - [x^n + 9x^2 - 4] = x^{n+1} - x^n = x^n(x - 1)$$
et puisque $x \in]0, 1[$, x^n est strictement positif et $x - 1$ est strictement négatif donc
$$\forall x \in]0, 1[, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0 \Leftrightarrow f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

4. En évaluant l'inégalité précédente en $x = u_n$, on obtient $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n)$. Puisque u_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$, on a $f_n(u_n) = 0$ donc $f_{n+1}(u_n) < 0$.
Il suffit de comparer u_n et u_{n+1}. Malheureusement, u_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$ et u_{n+1} de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$. Contrairement aux exercices précédents, les fonctions f_n et f_{n+1} sont distinctes et la question naturelle se pose :
$$\boxed{\text{Quelle fonction choisir : } f_n \text{ ou } f_{n+1} \text{ ?}}$$
L'exercice nous aide bien entendu puisque nous connaissons le signe de $f_{n+1}(u_n)$. Dès lors, nous allons comparer $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$. Puisque $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ (u_{n+1} est solution de l'équation $f_{n+1}(x) = 0$) et $f_{n+1}(u_n) < 0$ (question précédente), on en déduit que
$$f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1}).$$
La fonction f_{n+1} est strictement décroissante sur $[0, 1]$, bijective sur $[0, 1]$ et comme u_n et u_{n+1} appartiennent à $[0, 1]$, on en déduit que $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

5. La suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ (question 2) donc elle est convergente.

6. On a :
$$0 < u_n < \frac{2}{3} \Rightarrow 0 < (u_n)^n < (\frac{2}{3})^n$$
La suite $(\frac{2}{3})^n$ est géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]-1,1[$ donc elle converge vers 0. Le théorème d'encadrement s'applique et l'on en déduit que la suite $(u_n)^n$ converge vers 0.
Par construction, u_n est solution de l'équation $f_n(x) = 0$ donc
$$(u_n)^n + 9(u_n)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (u_n)^n = 4 - 9(u_n)^2$$
Puisque $\lim_{n\to+\infty}(u_n)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}(4 - 9(u_n)^2) = 4 - 9\lambda^2$, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on en déduit que
$$0 = 4 - 9\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$$
On sait que $u_n > 0$ pour tout entier n donc $\lambda = \lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$, ce qui implique que $\lambda = \frac{2}{3}$.
Conclusion : la suite $(u_n)_n$ converge vers $\frac{2}{3}$.