correction de l'exercice 1

$\underline{a}$: la fonction $x \mapsto 1+x^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad 1+x^2>0$ et $x \mapsto \ln x$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$ donc $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$\underline{b}$: Les fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto x^2-1$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ (fonctions de référence) et $x^2-1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ donc $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\backslash\{-1,1\} = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$

$\underline{c}$: Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x^2-3x+2$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ (fonctions de référence) et $x^2-3x+2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1,2\}$ donc $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\backslash\{1,2\} = \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$

$\underline{d}$: La fonction $x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times$ et la fonction $x \mapsto x^2+1$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (ce sont des fonctions de référence) et $x^2+1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^\times \cap \mathbb{R}\cap\mathbb{R} = \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$

$\underline{e}$: La fonction $x \mapsto x+\dfrac{1}{x}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$ donc $x \mapsto \exp\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$.

$\underline{f}$: La fonction $x \mapsto 1-4x^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $1-4x^2>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ donc $x \mapsto \sqrt{1-4x^2}$ est C^∞ sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$.

$\underline{g}$: La fonction $x \mapsto 2x^2-x-1$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $2x^2-x-1>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$ donc $x \mapsto \ln\left(2x^2-x-1\right)$ est C^∞ sur $\left]-\infty,-\dfrac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$

$\underline{h}$: On commence par remarquer que
$$h(x) = (1+x^2)^x = \exp\left(x\ln(1+x^2)\right)$$
(par définition des puissances non rationnelles).
La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad 1+x^2>0$ et $x \mapsto \ln x$ est C^∞ sur $]0,+\infty[$ donc $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $x \mapsto x\ln(1+x^2)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ ce qui entraine que $x \mapsto \exp(x\ln(1+x^2))$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

correction de l'exercice 2

Pour commencer, rappelons que si on veut un $DL_2(0)$ de $x^p f(x)$, il suffit de chercher un $DL_{2-p}(0)$ de $f(x)$
$$f(x) = P(x)+o(x^{2-p}) \Rightarrow x^p f(x) = x^p P(x) + o(x^2)$$
De même pour une division par x^q, pour obtenir un $DL_2(0)$ de $\dfrac{f(x)}{x^q}$, il suffit d'avoir un $DL_{2+p}(0)$ de $f(x)$
$$f(x) \underset{0}{=} P(x)+o(x^{2+p}) \Rightarrow \frac{f(x)}{x^p} \underset{0}{=} \frac{P(x)}{x^p}+o(x^2)$$

$\underline{a}$: On recherche un $DL_1(0)$ de e^{-x} et $\dfrac{1}{1+x}$ puisque l'on multiplie par x. Etant donné que $x \mapsto 0$, $-x \mapsto 0$, on peut donc substituer $-x$ dans le $DL_1(0)$ de e^x
$$\begin{aligned}
e^{-x} &= 1+(-x)+o(-x) = 1-x+o(x) \quad \frac{1}{1+x} = 1-x+o(x)\\
e^{-x}\times\frac{1}{1+x} &= (1-x+o(x))(1-x+o(x)) = 1-2x+o(x)\\
a(x) &= e^{-x}\frac{x}{1+x} = x(1-2x+o(x)) = x-2x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

$\underline{b}$: On recherche un $DL_3(0)$ de $\sqrt{1-2x}$ et $\sqrt[3]{1+3x}$ puisque l'on divise par x. Etant donné que $x \mapsto 0$, $2x \mapsto 0$ (resp. $3x \mapsto 0$) on peut donc substituer $2x$ (resp. $3x$) dans le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ (resp. $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$)
$$\begin{aligned}
\sqrt{1-2x} &= 1+\frac{1}{2}(-2x)-\frac{1}{8}(-2x)^2+\frac{1}{16}(-2x)^3+o((-2x)^3) = 1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\\
\sqrt[3]{1+3x} &= 1+\frac{1}{3}(3x)-\frac{1}{9}(3x)^2+\frac{5}{81}(3x)^3+o((3x)^3) = 1+x-x^2+\frac{5}{3}x^3+o(x^3)\\
\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x} &= \frac{\left(1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right)-\left(1+x-x^2+\frac{5}{3}x^3+o(x^3)\right)}{x} = -2+\frac{1}{2}x-\frac{13}{6}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

$\underline{c}$: On recherche un $DL_3(0)$ de $e^{4x}-1$ puisque l'on divise par x. Etant donné que $x \mapsto 0$, $4x \mapsto 0$ on peut donc substituer $4x$ dans le $DL_3(0)$ de e^x
$$\begin{aligned}
e^{4x} &= 1+(4x)+\frac{1}{2}(4x)^2+\frac{1}{6}(4x)^3+o((4x)^3) = 1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3+o(x^3)\\
\frac{e^{4x}-1}{x} &= \frac{\left(1+4x+8x^2+\frac{32}{3}x^3+o(x^3)\right)-1}{x} = 4+8x+\frac{32}{3}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

<u>d</u> : On recherche un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x^2)$ puisque l'on divise par x. Pour obtenir un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x^2)$, il suffit d'un « $DL_{3/2}(0)$ » donc d'un $DL_2(0)$ de $\ln(1+x)$. Etant donné que $x \mapsto 0$, $x^2 \mapsto 0$ on peut donc substituer x^2 dans le $DL_2(0)$ de $\ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}
\ln(1+x^2) &= (x^2) - \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 + o(x^3) \\
\frac{\ln(1+x^2)}{x} &= \frac{x^2 + o(x^3)}{x} = x + o(x^2)
\end{aligned}$$

<u>e</u> : On recherche un $DL_4(0)$ de $x\ln(1+x) - \exp(x^2)$ puisque l'on divise par x^2. Pour la détermination d'un $DL_4(0)$ de $x\ln(1+x)$, il suffit d'avoir un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ et pour la détermination d'un $DL_4(0)$ de $\exp(x^2)$, il suffit d'un $DL_2(0)$ de $\exp(x)$. Etant donné que $x \mapsto 0$, $x^2 \mapsto 0$ on peut donc substituer x^2 dans le $DL_2(0)$ de $\exp(x)$.

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\
\exp(x^2) &= 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\
\frac{x\ln(1+x) - \exp(x^2) + 1}{x^2} &= \frac{\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) + 1}{x^2} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

<u>f</u> : Pour commencer, on recherche un $DL_2(0)$ de e^x et e^{-x}. Etant donné que $x \mapsto 0$, $-x \mapsto 0$, on peut donc substituer $-x$ dans le $DL_2(0)$ de e^{-x}

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Etant donné que $x \mapsto 0$, $\frac{x^2}{2} + o(x^2) \mapsto 0$, on peut donc substituer $\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ dans le $DL(0)$ de $\ln(1+x)$. Puisque $\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, on en déduit que $o\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = o\left(x^2\right)$ donc il suffit de choisir un $DL_1(0)$ de $\ln(1+x)$

$$\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

correction de l'exercice 3

Pour chercher un équivalent, on commence par calculer la limite. Si elle est non nulle et finie, cette limite est l'équivalent cherché. Sinon, on devine à la main d'équivalent (par croissance comparée, par exemple : $1 + \ln x \sim \ln x$ quand $x \to 0$ ou $+\infty$, $x + x^2 \sim x$ quand $x \to 0$ et $x + x^2 \sim x^2$ quand $x \to 0$). Si cela ne convient pas, on pense aux DL.

<u>$x_0 = 0, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$</u> : On procède par DL (un $DL_1(0)$ est suffisant)

$$e^x - e^{-x} = (1 + x + o(x)) - (1 - x + o(x)) = 2x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x \qquad e^x + e^{-x} \underset{x\to 0}{\to} 2 \Rightarrow e^x + e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} 2$$

donc $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{2} = x$

<u>$x_0 = 0, \quad \sqrt{1+4x^2} - \sqrt[3]{1+3x}$</u> : On procède par DL (un $DL_1(0)$ est suffisant)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+4x^2} - \sqrt[3]{1+3x} &= (1+4x^2)^{1/2} - (1+3x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{2}(4x^2) + o(x^2) - \left(1 + \frac{1}{3}(3x) + o(x)\right) \\
&= 1 + 2x^2 - 1 - x + \underbrace{o(x^2) + o(x)}_{=o(x)} = -x + o(x) \Rightarrow \sqrt{1+4x^2} - \sqrt[3]{1+3x} \underset{x\to 0}{\sim} -x
\end{aligned}$$

$x_0 = 0, \quad \ln\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}\right)$:On procède par DL (un $DL_3(0)$ est nécessaire pour le numérateur)

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\right) &= \ln\left(\frac{(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3))-(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{2x}\right) = \ln\left(\frac{2x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{2x}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = \left(\frac{x^2}{6}+o(x^2))\right) + o\underbrace{\left(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)}_{\sim x^2/6} = \frac{x^2}{6}+o(x^2) \Rightarrow \ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{6}\end{aligned}$$

$x_0 = +\infty, \quad \ln(1+e^{-x})$: On procède par DL. Lorsque $x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$ donc on peut substituer e^{-x} dans le $DL_1(0)$ de $\ln(1+x)$

$$\ln(1+e^{-x}) = e^{-x} + o(e^{-x}) \Rightarrow \ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}$$

$x_0 = +\infty, \quad x(e^{1/x^2}-1)$: On procède par DL. Lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ donc on peut substituer $\dfrac{1}{x^2}$ dans le $DL_1(0)$ de e^x

$$e^{1/x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow e^{1/x^2} - 1 = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow e^{1/x^2} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \Rightarrow x\left(e^{1/x^2}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

$x_0 = +\infty, \quad \dfrac{x\ln(1+1/x^2)}{x^2+1}$: On procède par DL le numérateur. Lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ donc on peut substituer $\dfrac{1}{x^2}$ dans le $DL_1(0)$ de $\ln(1+x)$

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \qquad x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \\ &\Rightarrow \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\times\frac{1}{x^2}}{x^2} = \frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

$x_0 = 0, \quad (\ln x)/x - 1/x^2$: Les deux expressions $\dfrac{\ln x}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ tendent vers ∞ lorsque $x \to 0^+$ ($-\infty$ pour la première par croissance comparée, la seconde vers $+\infty$). *Formellement, le logarithme croissant bien moins vite que les puissances, comparer* $\dfrac{\ln x}{x}$ *et* $\dfrac{1}{x^2}$ *en* 0^+ *revient à comparer* $\dfrac{1}{x}$ *et* $\dfrac{1}{x^2}$ *en* 0^+. *Ce dernier est le dominant, donc on a l'intuition que* $\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to0^+}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}$. Démontrons le rigoureusement (l'étape formelle est fondamentale pour deviner le terme dominant).

$$\frac{\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \times (-x^2) = -x\ln x + 1 \underset{0^+}{\to} 1 \text{ (croissance comparée)} \Rightarrow \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{1}{x^2}$$

$x_0 = 0, \quad e^{-1/x^2} - 1/x$: Quand $x \to 0^+$, $-\dfrac{1}{x^2} \to -\infty$ donc $\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \to 0$ et $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ donc $\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\sim} -\dfrac{1}{x}$

$x_0 = 0, \quad e^{1/x^2} - 1/x$: : Les deux expressions $\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $\dfrac{1}{x}$ tendent vers $+\infty$ lorsque $x \to 0^+$ donc on ne peut deviner immédiatement l'équivalent. *Formellement, on dispose de deux expressions de même nature (deux puissances, identiques dans le cas présent), cela revient comparer* e^x *et* x^α *lorsque* $x \to +\infty$. *Par croissance comparer, c'est l'exponentielle qui s'impose donc donc on a l'intuition que* $\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\sim} \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Démontrons le rigoureusement (l'étape formelle est fondamentale pour deviner le terme dominant).

$$\frac{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x}}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)} = 1 - \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

On effectue le changement de variable $X = \dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{X} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{X}} = \dfrac{1}{X^{1/2}}$ (puisque $x \to +\infty$ donc $x > 0$). Quand $x \to 0^+$, $X \to +\infty$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x}}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)}\right] = \lim_{X\to+\infty}\left[1 - X^{1/2}\exp(-X)\right] = 1 \text{ (croissance comparée)} \Rightarrow \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\sim} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$x_0=+\infty,\quad \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$: On dispose de l'équivalent pour le dénominateur $x^2+1\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2$ mais pour le numérateur, on ne peut utiliser le $DL(0)$ de $\ln(1+x)$ car $x^2\to+\infty$. On factorise donc le terme dominant dans le logarithme

$$\ln(x^2+1)=\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]=\underbrace{\ln x^2}_{\to+\infty}+\underbrace{\ln\left[1+\frac{1}{x^2}\right]}_{\to 0}$$

donc $\ln(x^2+1)\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln x^2=2\ln x$, ce qui nous montre que $\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{2\ln x}{x^2}$

$x_0=+\infty,\quad \ln(e^x+e^{-x})$: On ne peut utiliser aucun DL, on constate que $e^x\to+\infty$ et $e^{-x}\to 0$ quand $x\to+\infty$ donc e^x domine e^{-x} en $+\infty$. En factorisant par ce dominant, on a

$$\ln(e^x+e^{-x})=\ln\left[e^x\left(1+e^{-2x}\right)\right]=\underbrace{\ln e^x}_{\to+\infty}+\underbrace{\ln\left[1+e^{-2x}\right]}_{\to 0}\Rightarrow\ln(e^x+e^{-x})\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln e^x=x$$

$x_0=-\infty,\quad \ln(e^x+e^{-x})$: On ne peut utiliser aucun DL, on constate que $e^x\to 0$ et $e^{-x}\to+\infty$ quand $x\to-\infty$ donc e^{-x} domine e^x en $+\infty$. En factorisant par ce dominant, on a

$$\ln(e^x+e^{-x})=\ln\left[e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)\right]=\underbrace{\ln e^{-x}}_{\to+\infty}+\underbrace{\ln\left[e^{2x}+1\right]}_{\to 0}\Rightarrow\ln(e^x+e^{-x})\underset{x\to+\infty}{\sim}\ln e^{-x}=-x$$

correction de l'exercice 4

Pour le calcul de limites, on procède, dans cet ordre croissant de difficulté, par les opérations algébriques usuelles (somme, produit, composée, etc), par croissance comparée et/ou changement de variable, par détermination d'équivalents, par DL (souvent d'ordre 1 ou 2).

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{xe^x-e^x+1}$:

$$xe^x-e^x+1=x\left(1+x+o(x)\right)-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+1=\frac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^3}{xe^x-e^x+1}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^3}{\frac{x^2}{2}}=x^3\times\frac{2}{x^2}=2x\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{xe^x-e^x+1}=\lim_{x\to 0}2x=0$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$: Quand $x\to+\infty$, $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\to 0$ donc on peut substituer $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ dans le $DL(0)$ de $\ln(1+x)$

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)&=\frac{1}{x\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x\sqrt{x}}\\ x^2\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x^2}{x\sqrt{x}}&=\sqrt{x}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}&=1+\frac{x}{2}+o(x)-\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)=x+o(x)\underset{x\to 0}{\sim}x\\ e^x-1&=(1+x+o(x))-1=x+o(x)\underset{x\to 0}{\sim}x\\ \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x}{x}&=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}1=1\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$:

$$\begin{aligned}x-(1+x)\ln(1+x)&=x-(1+x)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{2}\\ \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}&=-\frac{1}{2}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$:

$$\ln(1+x)-x=\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-x=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{x^2}{2}\qquad \ln(1+x)=x+o(x)\underset{x\to 0}{\sim}x$$

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)-e^x}{1-\exp(1/x)}$: Lorsque $x\to-\infty$, les expressions e^x et $\dfrac{1}{x}$ tendent vers 0 donc on peut les substituer dans les $DL(0)$ de $\ln(1+x)$ et e^x, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\ln(1+e^x)-e^x &= \left[e^x+\frac{(e^x)^2}{2}+o\left((e^x)^2\right)\right]-e^x=\frac{e^{2x}}{2}+o(e^{2x})\underset{x\to-\infty}{\sim}\frac{e^{2x}}{2}\\
1-\exp\left(\frac{1}{x}\right) &= 1-\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\underset{x\to-\infty}{\sim}-\frac{1}{x}\\
\frac{\ln(1+e^x)-e^x}{1-\exp(1/x)}\underset{x\to-\infty}{\sim}\frac{\frac{e^{2x}}{2}}{-\frac{1}{x}} &= -\frac{xe^{2x}}{2}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)-e^x}{1-\exp(1/x)}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{xe^{2x}}{2}=0
\end{aligned}$$

(par croissance comparée)

correction de l'exercice 5

1. La fonction $x\mapsto-\dfrac{1}{x^2}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$ donc $x\mapsto\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}^\times,\quad f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

2. Puisque la fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$, elle est continue sur $\mathbb{R}^\times$. Il reste à étudier la continuité en 0. Puisque $x\to 0$, $-\dfrac{1}{x^2}\to+\infty$ donc $\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\to 0$ et $f(0)=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$. Par conséquent, la fonction f est continue en 0 donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. En utilisant le changement de variable $X=\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{X}}=X^{1/2}$ et $X\to+\infty$, on a

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{X\to+\infty}2(X^{1/2})^3\exp(-X)=0$$

(croissance comparée) donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)=0$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)=0$ donc le théorème de prolongement continu de la dérivée montre que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0\\ \dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\end{cases}$$

correction de l'exercice 6

1. La fonction $x\mapsto\dfrac{e^x-1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$ (comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas). En outre, on a $\dfrac{e^x-1}{x}>0$ sur $\mathbb{R}^\times$ (faire un tableau de signe) donc $x\mapsto\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^\times$.
Etude de la continuité en 0. On utilise les DL

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{(1+x+o(x))-1}{x}=1+o(1)\Rightarrow\frac{e^x-1}{x}\underset{x\to 0}{\to}1\Rightarrow\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\underset{x\to 0}{\to}0$$

ce qui entraine l'égalité $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$ donc f est continue en 0 et par conséquent, sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas). En outre, on a $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$ sur $\mathbb{R}^\times$ (faire un tableau de signe) donc $x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$.

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \frac{\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)'}{\dfrac{e^x - 1}{x}} = \frac{\dfrac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2}}{\dfrac{e^x - 1}{x}} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

3. Pour la limite, on procède par DL

$$xe^x - e^x + 1 = x\left(1 + x + o(x)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$e^x - 1 = (1 + x + o(x)) - 1 = x + o(x) \underset{x \to 0}{\sim} x \Rightarrow \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x \times x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et $\lim_{x \to 0} f'(x) = \frac{1}{2}$ donc le théorème de prolongement continu de la dérivée montre que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

correction de l'exercice 7

$\underline{a}$: La fonction $x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme produit de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$). Ceci entraine que la fonction a est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle coïncide avec $x \mapsto \sqrt{x}e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+^\times$) donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$.
Etude de la continuité en 0. $\lim_{x \to 0^+} a(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}e^{-x} = 0 = a(0)$ donc a est continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction a est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Calcul de $\lim_{x \to 0^+} a'(x)$

$$a'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}}_{\to +\infty} - \underbrace{\sqrt{x}e^{-x}}_{\to 0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} a'(x) = +\infty$$

La fonction a est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim_{x \to 0} a'(x) = +\infty$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, on en déduit que la fonction a n'est pas dérivable en 0 mais elle est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad a'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x}$$

$\underline{b}$: La fonction $x \mapsto 1 + \sqrt{x}$ est C^1 et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Ceci entraine que la fonction b est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle coïncide avec $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}_+^\times$) donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$.
Etude de la continuité en 0. $\lim_{x \to 0^+} b(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln(1 + \sqrt{x}) = \ln 1 = 0 = b(0)$ donc b est continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction b est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Calcul de $\lim_{x \to 0^+} b'(x)$.

$$b'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x} + x)} \Rightarrow \lim_{x \to 0} b'(x) = +\infty$$

La fonction b est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim_{x \to 0} b'(x) = +\infty$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, on en déduit que la fonction b n'est pas dérivable en 0 mais elle est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad b'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x} + x)}$$

$\underline{c}$: La fonction $x \mapsto x^2 \ln x$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme produit de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$). Ainsi, la fonction c est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle coïncide avec $x^2 \ln x$ sur cet ensemble) donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$.

Etude de la continuité en 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = 0$ (croissance comparée) donc $\lim\limits_{x\to 0} c(x) = 0 = c(0)$ donc c est continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction c est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} c'(x)$

$$c'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln x + x \Rightarrow \lim_{x\to 0} c'(x) = 0$$

(par croissance comparée). La fonction c est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim\limits_{x\to 0} c'(x) = 0$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, on en déduit que la fonction c est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et

$$c'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x\ln x + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\underline{d}$: La fonction $x \mapsto 1+2x$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $1+2x > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $x \mapsto \ln(1+2x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Le quotient $x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\times$). Ainsi, la fonction d est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle coïncide avec $\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ sur cet ensemble) donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$.
Etude de la continuité en 0

$$\ln(1+2x) = 2x + o(x) \Rightarrow \ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x \Rightarrow \frac{\ln(1+2x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$$

ainsi $\lim\limits_{x\to 0} d(x) = 2 = d(0)$ donc d est continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction d est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} d'(x)$

$$\begin{aligned} d'(x) &= \frac{(\ln(1+2x))'x - \ln(1+2x)}{x^2} = \frac{\dfrac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x)}{x^2} = \frac{2x\,(1-2x+o(x)) - \left(2x - \dfrac{(2x)^2}{2} + o((2x)^2)\right)}{x^2} \\ &= \frac{-2x^2 + o(x^2)}{x^2} = -2 + o(1) \underset{x\to 0}{\sim} 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} d'(x) = 2 \end{aligned}$$

La fonction d est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim\limits_{x\to 0} d'(x) = 2$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, on en déduit que la fonction d est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et

$$d'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\dfrac{2x}{1+2x} - \ln(1+2x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\underline{e}$: La fonction $x \mapsto \exp(x\ln x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme produit et composée de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$). Ainsi, la fonction e est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle coïncide avec $\exp(x\ln x)$ sur cet ensemble) donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$.
Etude de la continuité en 0 : $x\ln x \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ (croissance comparée) donc $\lim\limits_{x\to 0^+} e(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \exp(x\ln x) = 1 = e(0)$ donc e est continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction e est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} e'(x)$

$$e'(x) = \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)\exp(x\ln x) = \underbrace{(\ln x + 1)}_{\to -\infty}\underbrace{\exp(x\ln x)}_{\to 1} \underset{x\to 0^+}{\to} -\infty$$

La fonction e est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim\limits_{x\to 0} e'(x) = -\infty$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, la fonction e n'est pas dérivable en 0 mais elle est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad e'(x) = (\ln x + 1)\exp(x\ln x)$$

$\underline{f}$: La fonction $x \mapsto 1-x$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $1-x > 0$ sur $]-\infty, 1[$ donc $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est C^1 sur $]-\infty,1[$ et la fonction f est C^1 sur $]-\infty,1[$ (comme produit de fonctions C^1 sur $]-\infty,1[$) donc elle est continue sur $]-\infty,1[$.
Etude de la continuité en 0 : $x\sqrt{1-x} \underset{x\to 1^-}{\to} 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en -1 et par conséquent sur $]-\infty,1]$.
La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Calcul de $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$

$$f'(x) = \sqrt{1-x} + \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \underbrace{\sqrt{1-x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{x}{2\sqrt{1-x}}}_{\to +\infty} \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, la fonction f n'est pas dérivable en -1 mais elle est C^1 sur $]-\infty, 1[$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f'(x) = \sqrt{1-x} + \frac{x}{2\sqrt{1-x}}$$

$\underline{g}$: La fonction $x \mapsto 1-x^2$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $1-x^2 > 0$ sur $]-1,1[$ donc $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est C^1 sur $]-1,1[$ et la fonction g est C^1 sur $]-1,1[$ (comme produit de fonctions C^1 sur $]-1,1[$) donc elle est continue sur $]-1,1[$.
Etude de la continuité en 1 et -1 : $(1-x)\sqrt{1-x^2} \underset{x\to\pm 1}{\to} 0$ donc $\lim_{x\to\pm 1} g(x) = 0 = g(\pm 1)$ donc f est continue en -1 et 1. Par conséquent, la fonction g est continue sur $[-1,1]$.
La fonction g est C^1 sur $]-1,1[$.. Calcul de $\lim_{x\to\pm 1} g'(x)$

$$g'(x) = \sqrt{1-x^2} + (1-x)\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - x\frac{(1-x)}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \quad \left(\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}\right)$$

Il est dès lors immédiat que $\lim_{x\to -1} g'(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +1} g'(x) = 0$. La fonction g est continue sur $[-1,1]$, C^1 sur $]-1,1[$ et $\lim_{x\to -1} g'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to +1} g'(x) = 0$, donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, la fonction g n'est pas dérivable en -1 et elle est C^1 sur $]-1,1]$

$$\forall x \in]-1,1], \quad g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} & \text{si } x \in]-1,1[\end{cases}$$

$\underline{h}$: La fonction $x \mapsto e^{2x} - 2e^x + 3$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Pour déterminer le signe de $e^{2x} - 2e^x + 3$, on pose $X = e^x$ ce qui donne

$$e^{2x} - 2e^x + 3 = X^2 - 2X + 3$$

Le discriminant de ce dernier trinôme est strictement négatif donc le trinôme est strictement positif lorsque X prend n'importe quelle valeur réelle. Par conséquent, $e^{2x} - 2e^x + 3$ est strictement positif lorsque x prend n'importe quelle valeur réelle.donc la fonction $x \mapsto \ln\left(e^{2x} - 2e^x + 3\right)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
$\underline{i}$: La fonction $x \mapsto x + x^2$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $x + x^2 = x(1+x) > 0$ sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x+x^2}$ est C^1 sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ et la fonction i est C^1 sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ (comme produit de fonctions C^1 sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$) donc elle est continue sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
Etude de la continuité en -1 et 0 : $x\sqrt{x+x^2} \underset{x\to 0 \text{ ou } -1}{\to} 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} i(x) = 0 = i(0)$ et $\lim_{x\to -1^-} i(x) = 0 = i(-1)$ donc i est continue en -1 et 0. Par conséquent, la fonction i est continue sur $]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[$.
La fonction i est C^1 sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.. Calcul de $\lim_{x\to -1} i'(x)$ et $\lim_{x\to 0} i'(x)$

$$i'(x) = \sqrt{x+x^2} + x\frac{1+2x}{\sqrt{x+x^2}} = \sqrt{x+x^2} + x\frac{1+2x}{\sqrt{x(1+x)}} = \sqrt{x+x^2} \pm \sqrt{\frac{x}{1+x}}(1+2x)$$

$(x = -\sqrt{x^2}$ quand $x < 0$ et $x = \sqrt{x^2}$ quand $x > 0)$. Il est dès lors immédiat que $\lim_{x\to -1} i'(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} i'(x) = 0$. La fonction i est continue sur $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$, C^1 sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ et $\lim_{x\to -1} i'(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} i'(x) = 0$, donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, la fonction i n'est pas dérivable en -1 et elle est C^1 sur $]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[$

$$\forall x \in]-\infty,-1[\cup[0,+\infty[, \quad i'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x+x^2} + x\dfrac{1+2x}{\sqrt{x(1+x)}} & \text{si } x \in]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[\end{cases}$$

$\underline{j}$: La fonction $x \mapsto x\sqrt{x} = x^{3/2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$, la fonction $x \mapsto e^x - 1$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $e^x - 1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}^\times$ donc $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^\times = \mathbb{R}_+^\times$. Ainsi, la fonction j est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle coïncide avec $\dfrac{x\sqrt{x}}{e^x-1}$ sur cet ensemble) donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$.
Etude de la continuité en 0

$$e^x - 1 = (1 + x + o(x)) - 1 = x + o(x) \Rightarrow e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x \Rightarrow \frac{x\sqrt{x}}{e^x - 1} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

ainsi $\lim_{x\to 0^+} j(x) = 0 = i(0)$ donc j est continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction j est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Calcul de $\lim_{x\to 0} j'(x)$

$$j'(x) = \frac{\left(x^{3/2}\right)'(e^x-1) - x^{3/2}e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}(e^x-1) - x^{3/2}e^x}{(e^x-1)^2}$$

On procède ensuite avec des DL pour déterminer les équivalents du numérateur et du dénominateur

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}x^{1/2}(e^x-1) - x^{3/2}e^x &= \frac{3}{2}x^{1/2}(x+o(x)) - x^{3/2}(1+o(1)) = x^{3/2} + o(x^{3/2}) \underset{x\to 0^+}{\sim} x^{3/2} \\ e^x - 1 &= (1+x+o(x)) - 1 = x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$j'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x^{3/2}}{x^2} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} j'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

La fonction j est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim_{x\to 0} j'(x) = +\infty$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, on en déduit que la fonction j n'est pas dérivable en 0 mais qu'elle est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et

$$\forall x > 0, \quad j'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^{1/2}(e^x-1) - x^{3/2}e^x}{(e^x-1)^2}$$

<u>k</u> : La fonction $x \mapsto \frac{e^{3x}-1}{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^\times$). Ainsi, la fonction k est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ (car elle coïncide avec $\frac{e^{3x}-1}{x}$ sur cet ensemble) donc elle est continue sur $\mathbb{R}^\times$.
Etude de la continuité en 0

$$e^{3x} - 1 = (1+3x+o(x)) - 1 = 3x + o(x) \Rightarrow e^{3x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 3x \Rightarrow \frac{e^{3x}-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x}{x} = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = 3$$

ainsi $\lim_{x\to 0} k(x) = 3 = k(0)$ donc k est continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}$.
La fonction k est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$. Calcul de $\lim_{x\to 0} k'(x)$

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{3e^{3x}x - (e^{3x}-1)}{x^2} = \frac{3x\,(1+3x+o(x)) - \left(1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} o(x^2) - 1\right)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{9}{2} + o(1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{9}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} k'(x) = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

La fonction k est continue sur $\mathbb{R}$, C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et $\lim_{x\to 0} k'(x) = \frac{9}{2}$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, on en déduit que la fonction k est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et

$$k'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{3e^{3x}x - (e^{3x}-1)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

<u>l</u> : La fonction $x \mapsto 1 + x$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $1 + x > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $x \mapsto \ln(1+x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto x - \ln(1+x)$. Le quotient $x \mapsto \frac{x - \ln(1+x)}{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (comme quotient de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\times$). Ainsi, la fonction l est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car elle coïncide avec $\frac{x-\ln(1+x)}{x}$ sur cet ensemble) donc elle est continue sur $\mathbb{R}_+^\times$.
Etude de la continuité en 0

$$\begin{aligned} x - \ln(1+x) &= x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{x-\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2} \\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x-\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0\end{aligned}$$

ainsi $\lim\limits_{x\to 0} l(x) = 0 = l(0)$ donc l est continue en 0 et par conséquent sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction l est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$. Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} l'(x)$

$$\begin{aligned}
l'(x) &= \frac{(x-\ln(1+x))'x-(x-\ln(1+x))}{x^2} = \frac{\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)x - x + \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\dfrac{-x}{1+x}+\ln(1+x)}{x^2} \\
&= \frac{-x(1-x+o(x)) + \left(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}+o(1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} l'(x) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La fonction l est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $\lim\limits_{x\to 0} l'(x) = \dfrac{1}{2}$ donc, d'après le théorème de prolongement continu de la dérivée, on en déduit que la fonction l est C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et

$$l'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\dfrac{-x}{1+x}+\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

correction de l'exercice 8
Rappelons que si $f+g \underset{a}{\sim} f$ alors $o(f+g) \underset{a}{=} o(g)$
$\underline{x_0 = +\infty, \quad \sqrt{1+x+x^2}}$:$\sqrt{1+x+x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. On factorise le terme dominant dans la racine carrée (qui est x^2)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x+x^2} &= \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)} = \underbrace{\sqrt{x^2}}_{=x \text{ car } x>0} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = x(1+\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}_{\to 0})^{1/2} \\
&= x\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2+o\left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\right)\right) \\
&= x\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \quad \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \\
&\Rightarrow \sqrt{1+x+x^2}-\left(x+\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{8x}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $y = x+\dfrac{1}{2}$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $\dfrac{3}{8x}$ est positif lorsque $x\to+\infty$, cette asymptote se trouve en dessous de la courbe représentation de la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x+x^2}$.
$\underline{x_0 = -\infty, \quad \sqrt{1+x+x^2}}$: $\sqrt{1+x+x^2} \underset{x\to-\infty}{\to} +\infty$. On factorise le terme dominant dans la racine carrée (qui est x^2)

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x+x^2} &= \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)} = \underbrace{\sqrt{x^2}}_{=-x \text{ car } x<0} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -x(1+\underbrace{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}_{\to 0})^{1/2} \\
&= -x\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2+o\left(\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\right)\right) \\
&= -x\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right]^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \quad \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -x-\frac{1}{2}-\underbrace{\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} \\
&\Rightarrow \sqrt{1+x+x^2}-\left(-x-\frac{1}{2}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} -\frac{3}{8x}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $y=-x-\dfrac{1}{2}$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $-\dfrac{3}{8x}$ est positif lorsque $x\to-\infty$, cette asymptote se trouve en dessous de la courbe représentation de la fonction $x\mapsto\sqrt{1+x+x^2}$.

$\underline{x_0=+\infty,\quad xe^x\ln(1+e^{-x})}$: $e^{-x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ donc on peut substituer e^{-x} dans le $DL(0)$ de $\ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}\ln(1+e^{-x}) &= (e^{-x})-\frac{(e^{-x})^2}{2}+o((e^{-x})^2)=e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}+o(e^{-2x})\\ xe^x\ln(1+e^{-x}) &= x-\underbrace{\frac{xe^{-x}}{2}+o(xe^{-x})}_{\to 0\text{ par croissance comparée}}\quad\Rightarrow xe^x\ln(1+e^{-x})-x\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{xe^{-x}}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent, $y=x$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $-\dfrac{xe^{-x}}{2}$ est négatif lorsque $x\to+\infty$, cette asymptote se trouve au dessus de la courbe représentation de la fonction $x\mapsto xe^x\ln(1+e^{-x})$.

$\underline{x_0=-\infty,\quad\sqrt{e^{2x}+x^2+1}}$: $\sqrt{e^{2x}+x^2+1}\underset{x\to-\infty}{\to}+\infty$. On factorise le terme dominant dans la racine carrée, c'est-à-dire x^2 (car $x^2\to+\infty$, $e^{2x}\to0$)

$$\begin{aligned}\sqrt{e^{2x}+x^2+1} &= \sqrt{x^2\left(\frac{e^{2x}}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)}=\underbrace{\sqrt{x^2}}_{=-x\text{ car }x<0}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{e^{2x}}{x^2}}=-x(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}+\frac{e^{2x}}{x^2}}_{\to0})^{1/2}\\ &= x\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{e^{2x}}{x^2}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{e^{2x}}{x^2}\right]^2+o\left(\left(\frac{1}{x^2}+\frac{e^{2x}}{x^2}\right)^2\right)\right)\\ &= x\left(1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{e^{2x}}{x^2}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{e^{2x}}{x^2}\right]^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\quad \frac{e^{2x}}{x^2}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)\text{ car }e^{2x}\to0\\ &= x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+\underbrace{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to0}\\ \Rightarrow &\ \sqrt{e^{2x}+x^2+1}-x\underset{x\to-\infty}{\sim}\frac{1}{2x}\end{aligned}$$

Par conséquent, $y=x$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $\dfrac{1}{2x}$ est négatif lorsque $x\to-\infty$, cette asymptote se trouve au dessus de la courbe représentation de la fonction $x\mapsto\sqrt{e^{2x}+x^2+1}$.

$\underline{x_0=+\infty,\quad x^2(e^{1/x}-1)}$: $\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ donc on peut substituer $\dfrac{1}{x}$ dans le $DL(0)$ de e^x.

$$\begin{aligned}e^{1/x}-1 &= \left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\ x^2(e^{1/x}-1) &= 1+\underbrace{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to0}\Rightarrow x^2(e^{1/x}-1)-1\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}\end{aligned}$$

Par conséquent, $y=1$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $\dfrac{1}{2x}$ est positif lorsque $x\to+\infty$, cette asymptote se trouve en dessous de la courbe représentation de la fonction $x\mapsto x^2(e^{1/x}-1)$.

$\underline{x_0=+\infty,\quad x^3\ln(1+1/x^2)}$: $\dfrac{1}{x^2}\underset{x\to+\infty}{\to}0$ donc on peut substituer $\dfrac{1}{x}$ dans le $DL(0)$ de $\ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= \frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\\ x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= x-\underbrace{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to0}\Rightarrow x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-x\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2x}\end{aligned}$$

Par conséquent, $y=x$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $-\dfrac{1}{2x}$ est négatif lorsque $x\to+\infty$, cette asymptote se trouve au dessus de la courbe représentation de la fonction $x\mapsto x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$.

$\underline{x_0 = +\infty, \quad \ln(e^x + x)}$: $\ln(e^x+x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. On factorise le terme dominant dans la racine carrée (qui est e^x par croissance comparée)

$$\begin{aligned}\ln(e^x + x) &= \ln\left[e^x\left(1 + xe^{-x}\right)\right] = \ln e^x + \ln(1 + \underbrace{xe^{-x}}_{\to 0 \text{ par croissance comparée}}) = x + \underbrace{xe^{-x} + o(xe^{-x})}_{\to 0} \\ &\Rightarrow \ln(e^x + x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} xe^{-x}\end{aligned}$$

Par conséquent, $y = x$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme xe^{-x} est positif lorsque $x \to +\infty$, cette asymptote se trouve en dessous de la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \ln(e^x + x)$.

$\underline{x_0 = +\infty, \quad x/(e^x - 1)}$: $\dfrac{x}{e^x - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $y = 0$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $\dfrac{x}{e^x - 1} \geqslant 0$ quand $x > 0$, cette asymptote se trouve en dessous de la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

$\underline{x_0 = -\infty, \quad x/(e^x - 1)}$: On commence par remarquer que $\dfrac{x}{e^x - 1} = -\dfrac{x}{1 - e^x}$ et comme $e^x \underset{x\to-\infty}{\to} 0$, on va procéder par DL. On peut substituer e^x dans le $DL(0)$ de $\dfrac{1}{1 - x}$ (car $e^x \underset{x\to-\infty}{\to} 0$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - e^x} &= 1 + e^x + o\left(e^x\right) \\ \frac{x}{e^x - 1} &= -\frac{x}{1 - e^x} = -x - \underbrace{xe^x + o\left(xe^x\right)}_{\to 0} \Rightarrow \frac{x}{e^x - 1} - (-x) \underset{x\to-\infty}{\sim} -xe^x\end{aligned}$$

Par conséquent, $y = -x$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $-xe^x$ est positif lorsque $x \to -\infty$, cette asymptote se trouve en dessous de la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

$\underline{x_0 = +\infty, \quad \ln(1 + x^2)}$: $\ln(1 + x^2) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. On factorise le terme dominant dans la racine carrée (qui est x^2)

$$\begin{aligned}\ln(1 + x^2) &= \ln\left[x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\right] = \ln x^2 + \ln(1 + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}) = 2\ln x + \underbrace{\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0} \\ &\Rightarrow \ln(1 + x^2) - 2\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Par conséquent, $y = 2\ln x$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $\dfrac{1}{x^2}$ est positif lorsque $x \to +\infty$, cette asymptote se trouve en dessous de la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$.

$\underline{x_0 = +\infty, \quad \ln(1 + xe^x)}$: $\ln(1 + xe^x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. On factorise le terme dominant dans la racine carrée (qui est xe^x)

$$\begin{aligned}\ln(1 + xe^x) &= \ln\left[xe^x\left(\frac{e^{-x}}{x} + 1\right)\right] = \underbrace{\ln(xe^x)}_{= x + \ln x} + \ln(1 + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x}}_{\to 0}) = x + \ln x + + \underbrace{\frac{e^{-x}}{x} + o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)}_{\to 0} \\ &\Rightarrow \ln(1 + xe^x) - (x + \ln x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}\end{aligned}$$

Par conséquent, $y = x + \ln x$ est l'asymptote cherchée en $+\infty$ et comme $\dfrac{e^{-x}}{x}$ est positif lorsque $x \to +\infty$, cette asymptote se trouve en dessous de la courbe représentation de la fonction $x \mapsto \ln(1 + xe^x)$.

$\underline{x_0 = +\infty, \quad \ln(1 + xe^{-x})}$: Puisque $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (par croissance comparée), on en déduit que $\ln(1 + xe^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Par conséquent, l'asymptote cherchée est $y = 0$ et elle se trouve en dessous de la courbe représentation de $x \mapsto \ln(1 + xe^{-x})$ par $\ln(1 + xe^{-x}) \geqslant 0$ lorsque $x \geqslant 0$.