correction de l'exercice 1

1. (a) $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$.

   (b) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_N) : S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$.

   Initialisation $N = 1$: $S_1 = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc $S_1 = 1 - \frac{1}{1+1}$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_1)$.

   Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_N)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{N+1})$, i.e. supposons que $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$ et montrons que $S_{N+1} = 1 - \frac{1}{N+2}$.

   $$\begin{aligned} S_{N+1} &= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n(n+1)} = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}\right)}_{=S_N=1-1/(N+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} = 1 - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}\left(1 - \frac{1}{N+2}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}\left(\frac{N+1}{N+2}\right) = 1 - \frac{1}{N+2} \end{aligned}$$

   ce qui démontre $(\mathcal{P}_{N+1})$ et achève la récurrence.

   (c) L'égalité $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$ montre que la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, et sa limite vaut 1, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

2. On note S_N la N^{e} somme partielle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}$, i.e. $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-1}$.

   Comme mentionné dans l'indication, on commence par montrer l'identité algébrique proposé

   $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\frac{2n+1-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{4n^2-1}$$

   Montrons par récurrence que $S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right)$ en posant $(\mathcal{P}_N) : S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right)$.

   Initialisation $N = 1$: $S_1 = \sum_{n=1}^{1} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{4\times 1^2 - 1} = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\times 1+1}\right) = \frac{1}{3}$ donc $S_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\times 1+1}\right)$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_1)$.

   Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_N)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{N+1})$, i.e. supposons que $S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right)$ et montrons que $S_{N+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2(N+1)+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+3}\right)$.

   $$\begin{aligned} S_{N+1} &= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{4n^2-1} = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{4n^2-1}\right)}_{=S_N} + \frac{1}{4(N+1)^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(N+1)-1} - \frac{1}{2(N+1)+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+3}\right) \end{aligned}$$

   ce qui démontre $(\mathcal{P}_{N+1})$ et achève la récurrence.

   L'égalité $S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+3}\right)$ montre que la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ converge, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}$ est convergente, et sa limite vaut $\frac{1}{2}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

correction de l'exercice 2

1. (a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2} = \frac{n(n+1) - n^2 - (n+1)}{n^2(n+1)} = \frac{-1}{n^2(n+1)} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$

   $\frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{(n-1) - n^2 + n(n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{-1}{n^2(n-1)} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

(b) On somme l'encadrement précédent sur $n \in [\![2, N]\!]$ (la valeur $n = 1$ n'étant pas possible pour la question 1.a), ce qui nous donne

$$(I) \qquad \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

En utilisant le principe des dominos, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} \underset{k=n+1}{=} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{k=3}^{N+1} \frac{1}{k} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} \\
&= \left(\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} - \left(\left[\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{N+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \\
\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \\
&= \left(\sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1} - \left(\left[\sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{N} \\
\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{1^2} = T_N - 1
\end{aligned}$$

L'inégalité (I) combinée aux égalités précédentes nous donne

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \leqslant T_N - 1 \leqslant 1 - \frac{1}{N} \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leqslant T_N \leqslant 2 - \frac{1}{N}$$

(c) L'inégalité $T_N \leqslant 2 - \dfrac{1}{N} \leqslant 2$ montre que la suite (T_N) est majorée par 2.

(d) $T_{N+1} - T_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(N+1)^2} \geqslant 0$ donc la suite (T_N) est croissante.

(e) La suite des sommes partielles (T_N) de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est croissante et majorée donc elle est convergente, ce qui implique que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

(f) Puisque la suite (T_N) est convergente, chaque membre de l'encadrement de la question 1.b) est convergente, ce qui nous permet de faire tendre N vers $+\infty$ dans cet encadrement, ce qui nous donne

$$\lim_{N\to+\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{N+1}\right) \leqslant \lim_{N\to+\infty} T_N \leqslant \lim_{N\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{N}\right) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$$

2. (a) On procède par un calcul direct

$$\begin{aligned}
V_{N+1} - V_N &= U_{N+1} - \ln(N+2) - [U_N - \ln(N+1)] = U_{N+1} - U_N - \ln(N+2) + \ln(N+1) \\
&= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+2) + \ln(N+1) = \frac{1}{N+1} - \ln(N+2) + \ln(N+1) \geqslant 0
\end{aligned}$$

(en remplaçant x par $N+1$ dans la majoration proposée), ce qui montre que la suite (V_N) est croissante.

(b) $V_1 = U_1 - \ln(1+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{1} \frac{1}{n} - \ln 2 = 1 - \ln 2$. La suite (V_N) est croissante donc

$$\forall N \geqslant 1, \quad V_N \geqslant V_1 \Leftrightarrow U_N - \ln(N+1) \geqslant 1 - \ln 2 \geqslant 0 \Rightarrow U_N \geqslant \ln(N+1)$$

(c) Puisque $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \ln(N+1) = +\infty$, la minoration $U_N \geqslant \ln(N+1)$ entraine que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} U_N = +\infty$. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

correction de l'exercice 3

1. (a) $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$ donc $S_{N+1} - S_N = \frac{1}{e^{N+1} + e^{-(N+1)}} \geqslant 0$ donc la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$ est croissante.

   (b) Puisque l'on $e^n + e^{-n} \geqslant e^n > 0$ donc $\frac{1}{e^n + e^{-n}} \leqslant \frac{1}{e^n} = e^{-n}$.

   (c) En sommant sur $n \in [\![0, N]\!]$ l'inégalité de la question 1.b), on a

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leqslant \sum_{n=0}^{N} e^{-n} = \sum_{n=0}^{n} (e^{-1})^n = \frac{1 - (e^{-1})^{N+1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1 - e^{-(N+1)}}{1 - e^{-1}}$$

   (d) La suite des sommes partielles (S_N) étant croissante, pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle est majorée (par une constante indépendante de N). Puisque $e^{-(N+1)} \geqslant 0$, la majoration de S_N obtenue à la question 1.c), on a

$$S_N \leqslant \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e - 1}$$

   Par conséquent, la suite des sommes partielles (S_N) est croissante et majorée par $\frac{e}{e-1}$ donc elle converge, ce qui entraine la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n + e^{-n}}$, et $\lim_{N\to+\infty} S_N \leqslant \frac{e}{e-1}$, ce qui signifie que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n + e^{-n}} \leqslant \frac{e}{e-1}$.

2. (a) On somme sur $n \in [\![1, N]\!]$ l'encadrement proposé par l'énoncé, ce qui nous donne

$$\forall N \geqslant 1, \quad 2\sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

   Par le principe des dominos, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n+1} - \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n} \underset{j=n+1}{=} \sum_{j=2}^{N+1} \sqrt{j} - \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n} \\ &= \sum_{n=2}^{N+1} \sqrt{n} - \sum_{n=1}^{N} \sqrt{n} = \left[\sum_{n=2}^{N} \sqrt{n} + \sqrt{N+1}\right] - \left[\sqrt{1} + \sum_{n=2}^{N} \sqrt{n}\right] \\ &= \sqrt{N+1} - 1 \end{aligned}$$

   De même, on a $\sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) = \sqrt{N}$, ce qui entraine l'encadrement demandé

$$\forall N \geqslant 1, \quad 2\left(\sqrt{N+1} - 1\right) \leqslant T_N \leqslant 2\sqrt{N}.$$

   (b) Puisque $\lim_{N\to+\infty} 2\left(\sqrt{N+1} - 1\right) = +\infty$, la minoration $T_N \geqslant 2\left(\sqrt{N+1} - 1\right)$ entraine que $\lim_{N\to+\infty} T_N = +\infty$, ce qui implique que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

correction de l'exercice 4

1. On encadre la fonction sous l'intégrale

$$\forall t \in [0, 1], \quad 1 \leqslant 1 + t \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1 \underset{t\geqslant 0}{\Rightarrow} (0 \leqslant)\frac{t^n}{2} \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

   puis on intègre sur $[0, 1]$ (ce qui est licite par l'intégration porte sur des bornes croissantes)

$$0 = \int_0^1 0dt \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, le théorème d'encadrement implique que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2. On utilise la linéarité de l'intégrale

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t}dt = \int_0^1 t^n \frac{1+t}{1+t}dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

3. On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_N) : S_N = I_0 - (-1)^{N+1} I_{N+1}$.

   Initialisation $N = 0$: $S_0 = \sum_{n=0}^{0} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{(-1)^0}{0+1} = 1$ et

$$I_0 - (-1)^{0+1} I_{0+1} = I_0 + I_1 = \frac{1}{0+1} = 1$$

   (question 2) donc $S_0 = I_0 - (-1)^{0+1} I_{0+1}$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_0)$.
   Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_N)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{N+1})$, i.e. supposons que $S_N = I_0 - (-1)^{N+1} I_{N+1}$ et montrons que $S_{N+1} = I_0 - (-1)^{N+2} I_{N+2}$.

$$S_{N+1} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^n}{n+1} = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \right)}_{=S_N} + \frac{(-1)^{N+1}}{N+2} = I_0 - (-1)^{N+1} I_{N+1} + \frac{(-1)^{N+1}}{N+2}$$

   En utilisant la relation $I_{N+2} + I_{N+1} = \frac{1}{N+2} \Leftrightarrow I_{N+1} = \frac{1}{N+2} - I_{N+2}$, on obtient

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= I_0 - (-1)^{N+1} \left(\frac{1}{N+2} - I_{N+2} \right) + \frac{(-1)^{N+1}}{N+2} = I_0 - \frac{(-1)^{N+1}}{N+2} + (-1)^{N+1} I_{N+2} + \frac{(-1)^{N+1}}{N+2} \\ &= I_0 + (-1)^{N+1} I_{N+2} = I_0 - (-1)^N I_{N+2} = I_0 - (-1)^N (-1)^2 I_{N+2} = I_0 - (-1)^{N+2} I_{N+2} \end{aligned}$$

   ce qui démontre $(\mathcal{P}_{N+1})$ et achève la récurrence.

4. Puisque $\lim_{N \to +\infty} I_{N+2} = 0$, on en déduit que $\lim_{N \to +\infty} (-1)^{N+1} I_{N+1} = 0$ et la relation $S_N = I_0 - (-1)^{N+1} I_{N+1}$ entraine que $\lim_{N \to +\infty} S_N = I_0$. La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente, donc la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge. En outre, la suite des sommes partielles converge vers I_0 donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = I_0 = \int_0^1 \frac{t^0}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln|1+t|]_{t=0}^{t=1} = \ln 2$$

correction de l'exercice 5
Pour commencer, on se rappelle que

- les séries $\sum_{k \geqslant 0} x^k$, $\sum_{k \geqslant 0} kx^k$, $\sum_{k \geqslant 0} k(k-1)x^k$, $\sum_{k \geqslant 0} k^2 x^k$ convergent si et seulement si $x \in]-1,1[$ et que

$$\begin{aligned} \forall x \quad &\in \quad]-1,+1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} \right), \quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x} \right) \\ \sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} \quad &= \quad \frac{1}{(1-x)^2} \underset{\times x}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \underset{\times x}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^k = \frac{x^2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

- la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$

$\boxed{\text{a)}}$ La série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n(n-1)}{5^n} = \sum_{n \geqslant 0} n(n-1) \left(\frac{1}{5} \right)^n$ converge puisque $\frac{1}{5} \in]-1,+1[$ et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{5} \right)^n = \frac{2 \times \left(\frac{1}{5} \right)^2}{\left(1 - \frac{1}{5} \right)^3} = \frac{5}{32}$$

$\boxed{\text{b)}}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n^2}{5^n}=\sum\limits_{n\geqslant 0}n^2\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ converge puisque $\dfrac{1}{5}\in]-1,+1[$ et l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{5}\right)^n=\frac{2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}+\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{15}{32}$$

$\boxed{\text{c)}}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{4n^2+5n}{5^n}=4\sum\limits_{n\geqslant 0}n^2\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+5\sum\limits_{n\geqslant 0}n\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ converge puisque $\dfrac{1}{5}\in]-1,+1[$ (par combinaison linéaire de deux séries convergentes) et l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4n^2+5n}{5^n} &= 4\sum_{n=0}^{+\infty}n^2\left(\frac{1}{5}\right)^n+5\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{5}\right)^n=4\left[\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\left(\frac{1}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]+5\times\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}\\ &= 4\left[\frac{2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3}+\frac{\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}\right]+\frac{25}{16}=\frac{55}{16}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{d)}}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n n}{3^n}=\sum\limits_{n\geqslant 0}n\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ converge puisque $-\dfrac{1}{3}\in]-1,+1[$ et l'on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2}=-\frac{3}{16}$$

$\boxed{\text{e)}}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n n^2}{3^n}=\sum\limits_{n\geqslant 0}n^2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n\geqslant 0}n(n-1)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\sum\limits_{n\geqslant 0}n\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ converge puisque $-\dfrac{1}{3}\in]-1,+1[$ (par combinaison linéaire de deux séries convergentes) et l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n} &= \sum_{n=0}^{+\infty}n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\ &= \frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^3}+\frac{-\frac{1}{3}}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2}=-\frac{3}{32}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{f)}}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}=\sum\limits_{n\geqslant 0}n(n-1)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ est convergente puisque $-\dfrac{1}{3}\in]-1,+1[$ et l'on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^3}=\frac{3}{32}$$

$\boxed{\text{g)}}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}=\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}=\exp(1)=e$

$\boxed{\text{h)}}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{4(-1)^{n+1}}{n!}=-4\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n!}$ converge (série exponentielle) et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n!}=-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=-4\exp(-1)=-\frac{4}{e}$$

$\boxed{\text{i)}}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n2^n}{n!}=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n2^n}{n!}=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{2^n}{(n-1)!}\underset{k=n-1}{=}\sum\limits_{k\geqslant 0}\dfrac{2^{k+1}}{k!}=2\sum\limits_{k\geqslant 0}\dfrac{2^k}{k!}$ est convergente (série exponentielle) et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n2^n}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n}{n!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}\underset{k=n-1}{=}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^{k+1}}{k!}=2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!}=2\exp(2)=2e^2$$

$\boxed{\text{j)}}$ La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{3^n}{(n+1)!} \underset{k=n+1}{=} \sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{3^{k+1}}{k!} = 3\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{3^k}{k!} = 3\left[\left(\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{3^k}{k!}\right) - 1\right]$ est convergente (série exponentielle) et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} \underset{k=n+1}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k!} = 3\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k!} = 3\left[\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}\right) - 1\right] = 3\left[\exp(3) - 1\right] = 3e^3 - 3$$