correction de l'exercice 1

1. La famille a un moins garçon signifie qu'elle en a un ou deux ou trois .... donc, les évènements (A_i) étant deux à deux disjoints, on a

$$\begin{aligned} q &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} p^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} p^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} p^{k+1} \quad (k = n-1) = \frac{p}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} p^n = \frac{p}{2} \times \frac{1}{1-p} = \frac{p}{2(1-p)} \\ q_0 &= 1 - q = 1 - \frac{p}{2(1-p)} = \frac{2-3p}{2(1-p)} \end{aligned}$$

2. Il est immédiat que l'on se situe dans le schéma binômial donc la probabilité recherchée est égale à

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

3. Le nombre de garçons dans la famille dépend bien entendu du nombre d'enfants de la famille. En considèrant le système complet d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} P(G_k) &= P(G_k \cap A_0) + P(G_k \cap A_1) + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} P(G_k \cap A_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(G_k \cap A_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(G_k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2} p^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{k+1}} \end{aligned}$$

   Justification des calculs : *Etant donné que l'on ne peut avoir strictement plus de garçons que d'enfants dans la famille, l'évènement $G_k \cap A_n$ est vide lorsque $k > n \Leftrightarrow n < k$.*
   D'autre part, la probabilité conditionnelle $P_{A_n}(G_k)$ est la probabilité d'avoir k garçons lorsque la famille a n enfants. Puisque $n \geqslant k \geqslant 1$, cette probabilité conditionnelle est donc égale à $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ (cf. question 2)

4. En utilisant l'évènement contraire, on a

$$\begin{aligned} P(G_0) &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(G_k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1 - \frac{p}{2}\right)^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2\left(1 - \frac{p}{2}\right)} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\frac{p}{2}}{1 - \frac{p}{2}}\right)^k \\ &= 1 - \frac{1}{2-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{2-p}\right)^k = 1 - \frac{1}{2-p} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{2-p}\right)^{j+1} \quad (j = k-1 \Leftrightarrow k = j+1) \\ &= 1 - \frac{p}{(2-p)^2} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{2-p}\right)^j = 1 - \frac{p}{(2-p)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{p}{2-p}} = 1 - \frac{p}{(2-p)^2} \times \frac{2-p}{2-2p} = 1 - \frac{p}{2(2-p)(1-p)} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 2

On considère P_k (resp. F_k) l'évènement " obtenir Pile au k-ième lancer " (resp. " obtenir Face au k-ème lancer "). Pour éviter des notations trop lourdes, on notera PPF l'évènement $P_1 \cap P_2 \cap F_3$.
On considère une pièce telle que la probabilité d'obtenir "pile" est p. On lance indéfiniment la pièce et on note T la variable égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, la séquence PF.

1. $\underline{P(T=2)}$:

$$P(T=2) = P(PF) = P(P)P(F) = p(1-p)$$

   $\underline{P(T=3)}$:

$$P(T=3) = P\left[(FPP) \cup (FPF)\right] = P(PPF) + P(FFP) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p)(p+1-p) = p(1-p)$$

   $\underline{P(T=4)}$:

$$P\left(T=4\right) = P\left[(PPPF) \cup (FPPF) \cup (FFPF)\right] = p^3(1-p) + (1-p)^2 p^2 + (1-p)^3 p$$

2. Il est évident que $T(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ (il faut 2 lancers pour avoir une séquence PF !!).
Aux lancers $n-1$ et n, on doit nécessairement avoir la séquence PF (c'est la première fois qu'elle apparait). Dans les lancers précédents, aucun Pile ne peut être suivi de Face (sinon la séquence PF) apparait avant le lancer n. On en déduit que si un Pile apparait dans les $n-2$ premiers lancers, alors il est suivi nécessairement de Piles jusqu'au lancer $n-1$ inclus, ce qui nous donne

$$(T=n) = (\overbrace{\underbrace{P\cdots P}_{n-1 \text{ fois}}F}^{n \text{ lancers}}) \cup (\overbrace{\underbrace{F}_{1 \text{ fois}}\underbrace{P\cdots P}_{n-2 \text{ fois}}F}^{n \text{ lancers}}) \cup (\overbrace{\underbrace{FF}_{2 \text{ fois}}\underbrace{P\cdots P}_{n-3 \text{ fois}}F}^{n \text{ lancers}}) \cup \cdots \cup (\overbrace{\underbrace{F\cdots F}_{n-2 \text{ fois}}PF}^{n \text{ lancers}}) = \bigcup_{k=0}^{n-2}(\overbrace{\underbrace{F\cdots F}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{P\cdots P}_{n-k-1 \text{ fois}}\ F}^{n \text{ lancers}})$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} P(T=n) &= P\left[\bigcup_{k=0}^{n-2}(\overbrace{\underbrace{F\cdots F}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{P\cdots P}_{n-1-k \text{ fois}}\ F}^{n \text{ lancers}})\right] = \sum_{k=0}^{n-2} P(\overbrace{\underbrace{F\cdots F}_{k \text{ fois}}\ \underbrace{P\cdots P}_{n-1-k \text{ fois}}\ F}^{n \text{ lancers}}) = \sum_{k=0}^{n-2} q^{k+1}p^{n-k-1} \\ &= qp^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2} q^k p^{-k} = qp^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{q}{p}\right)^k = qp^{n-1}\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{q}{p}} \quad (p \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow q \neq p \Leftrightarrow \frac{q}{p} \neq 1) \\ &= qp^{n-1}\frac{1-\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}}{1-\frac{q}{p}} = qp^{n-1}\frac{\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p^{n-1}}}{\frac{p-q}{p}} = pq\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q} \end{aligned}$$

3. Espérance de T : la variable T admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 2} nP(T=n)$ converge.

$$\sum_{n\geqslant 2} nP(T=n) = \sum_{n\geqslant 2} npq\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q} = \frac{pq}{p-q}\left[\sum_{n\geqslant 2} np^{n-1} - \sum_{n\geqslant 2} nq^{n-1}\right]$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 2} nP(T=n)$ est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (p et q appartiennent à $]0,1[\subset]-1,1[$) donc T admet une espérance et l'on a :

$$\begin{aligned} E(T) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(T=n) = \frac{pq}{p-q}\left[\sum_{n=2}^{+\infty} np^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} nq^{n-1}\right] \\ &= \frac{pq}{p-q}\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} np^{n-1} - 0\times p^{0-1} - 1\times p^{1-1}\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} - 0\times q^{0-1} - 1\times q^{1-1}\right)\right] \\ &= \frac{pq}{p-q}\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} np^{n-1}\right) - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1}\right)\right] = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{(1-p)^2} - \frac{1}{(1-q)^2}\right) \end{aligned}$$

Puisque l'on a $p+q=1$, donc $1-p=q$ et $1-q=p$, on obtient

$$E(T) = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{pq}{p-q}\left(\frac{p^2-q^2}{p^2q^2}\right) = \frac{1}{p-q}\times\left(\frac{(p-q)(p+q)}{pq}\right) = \frac{p+q}{pq} = \frac{1}{pq}$$

correction de l'exercice 3

1. $P(X=1)$: L'évènement $(X=1)$ est impossible (obtenir PF en un lancer relève de Mission Impossible, même si l'impossible n'est pas français ! :-)) donc $P(X=1)=0$.
$P(X=2)$: $P(X=2) = P(PP) = p^2$
$P(X=3)$: $P(X=3) = P(FPP) = p^2q$
$P(X=4)$: $P(X=4) = P(FFPP) + P(PFPP) = q^2p^2 + p^3q = p^2q(q+p) = p^2q$

2. $P_{(P_1)}(X=n)$: L'évènement (P_1) est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X=n)$, autrement dit, on a obtenu Pile au premier lancer et on souhaite obtenir pour la première fois la séquence PP pour la première fois au n-ième lancer. Il reste donc $n-1$ lancers à accomplir et, en ces $n-1$ lancers, on doit obtenir la séquence PP pour la première fois aux deux derniers de ces $n-1$ lancers. Etant donné que l'on ne peut obtenir Pile au second lancer (sinon,

la séquence PP apparait en deux lancers et non en n lancers ($n \geqslant 3$)), on est obligé d'obtenir Face au deuxième lancer et la séquence PP doit apparaitre au dernier lancer des $n-2$ lancers restants, ce qui nous donne

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{P}}_{\text{lancer } n^\circ 1} \quad \underbrace{F}_{\text{lancer } n^\circ 2} \quad \underbrace{\cdots PP}_{n-2 \text{ lancers restants}}}^{n \text{ lancers}}$$

Par conséquent, on a

$$P_{(P_1)}(X=n) = P(F_2 \cap (X=n-2)) = P(F_2)P(X=n-2) = qP(X=n-2)$$

$\underline{P_{(F_1)}(X=n)}$: L'évènement (F_1) est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X=n)$, autrement dit, on a obtenu Face au premier lancer et on souhaite obtenir pour la première fois la séquence PP pour la première fois au n-ième lancer. Il reste donc $n-1$ lancers à accomplir et, en ces $n-1$ lancers, on doit obtenir la séquence PP pour la première fois aux deux derniers de ces $n-1$ lancers. Aucune contrainte n'exigible sur le second lancer donc la séquence PP doit apparaitre au dernier lancer des $n-1$ lancers restants, ce qui nous donne

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{F}}_{\text{lancer } n^\circ 1} \quad \underbrace{\cdots PP}_{n-1 \text{ lancers restants}}}^{n \text{ lancers}}$$

Par conséquent, on a

$$P_{(F_1)}(X=n) = P(X=n-1)$$

3. En utilisant le système complet d'évènements (P_1, F_1), la formule des probabilités totales nous donne, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P(P_1 \cap (X=n)) + P(F_1 \cap (X=n)) = P(P_1)P_{(P_1)}(X=n) + P(F_1)P_{(F_1)}(X=n) \\ &= pqP(X=n-2) + qP(X=n-1) \end{aligned}$$

4. (a) D'après la question 3, la suite $(P(X=n))_{n\geqslant 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 et

$$\forall n \geqslant 3, \quad P(X=n) = \frac{1}{3}P(X=n-1) + \frac{2}{9}P(X=n-2)$$

donc son équation caractéristique est $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ dont les racines sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Il existe donc deux constantes α et β telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad P(X=n) = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

En utilisant les valeurs de $P(X=1)$ et $P(X=2)$ obtenues à la question 1, on en déduit

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \beta\left(-\frac{1}{3}\right)^1 = P(X=1) = 0 \\ \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \beta\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = P(X=2) = \frac{4}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \times \frac{2}{3} - \beta \times \frac{1}{3} = 0 \\ \alpha \times \frac{4}{9} + \beta \times \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha = \frac{2}{3} & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ \beta = \frac{4}{3} & L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1 \end{array}\right.$$

Par conséquent, la loi de X est donné par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(X=n) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

En effectuant le changement de variable $n = j+1$, on obtient

$$\forall j \geqslant 0, \quad P(X=j+1) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+1} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{j+1} = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^j - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^j$$

(b) $\underline{E(X)}$: La variable X admet une espérance car la série $\sum_{n\geqslant 2} nP(X=n)$ converge. En effet, l'égalité (puis le changement de variable $n=j+1$)

$$\sum_{n\geqslant 2} nP(X=n) = \sum_{n\geqslant 2} n\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 2} n\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3}\sum_{n\geqslant 2} n\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

montre que cette série est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (car $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ appartiennent à $]-1,1[$). On peut donc utiliser la question 4.3, ce qui montre que $E(X)=\frac{15}{4}$.

$\underline{E(X(X-1))}$: La variable $X(X-1)$ admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)P(X=n)$ converge. L'égalité suivante

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)P(X &= n)=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)P(X=n)=\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\\ &= \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{4}{3}\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

montre que cette série est une combinaison linéaire de deux séries convergentes (car $\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ appartiennent à $]-1,1[$) et l'on a

$$\begin{aligned}E[X(X-1)] &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3}+\frac{4}{3}\times\frac{2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^3}=\frac{129}{8}\end{aligned}$$

$\underline{V(X)}$: Les variables X et $X(X-1)$ admettent une espérance donc la variable $X+X(X-1)=X^2$ admet également une espérance et comme X admet aussi une espérance, on en déduit que la variable X admet une variance et l'on a

$$\begin{aligned}E(X^2) &= E[X+X(X-1)]=E(X)+E[X(X-1)]=\frac{15}{4}+\frac{129}{8}=\frac{159}{8}\\ V(X) &= E(X^2)-(E(X))^2=\frac{159}{8}-\left(\frac{15}{4}\right)^2=\frac{93}{16}\end{aligned}$$

correction de l'exercice 4

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

1. La probabilité de piocher une boule noire est $\frac{1}{5}$ et N est le rang d'apparition de la première boule noire donc la variable N suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{5}$ i.e, si A désigne l'obtention d'une boule noire,

$$N(\Omega)=\mathbb{N}^{\times},\qquad \forall n\in\mathbb{N}^{\times}\quad P(N=n)=P(\overline{A}\cdots\overline{A}A)=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

   et son espérance vaut $E(N)=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$

2. $P_{(N=n)}(X=k)$: L'évènement $(N=n)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X=k)$, i.e. il a fallu n lancers pour obtenir la première boule noire, donc on a le droit de piocher n boules à la seconde série de tirages, et l'on souhaite obtenir k boules noires.
   Si $k>n$, c'est impossible car on ne peut piocher plus de boules noires que de boules piochées, ce qui implique que $P_{(N=n)}(X=k)=0$
   Si $k\leqslant n$, on est dans le contexte binômiale (n expériences identiques et indépendantes (les pioches) et réalisation de k succès (l'obtention d'une boule noire) donc $P_{(N=n)}(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$.
   On résume cela

$$P_{(N=n)}(X=k)=\begin{cases}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} & \text{si } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}$$

3. $\underline{P(X=0)=\frac{4}{9}}$: L'évènement $(X=0)$ correspond à l'obtention de zéro boule noire lors de la seconde série de tirages. Le nombre de boules piochées dépend du rang d'apparition de la première boule noire donc des évènements $(N=1),(N=2),\ldots$. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(N=n)_{n\geqslant 1}$

$$P(X=0)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(N=0\cap X=0)$$

Tous les évènements $(N=0\cap X=0)$ sont possibles dans cette somme, donc nous avons

$$\begin{aligned}
P\left(X=0\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}P(N=n)P_{(N=n)}(X=0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\binom{n}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-0}=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\\
&= \frac{1}{5}\times\frac{5}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{2}\right)^{n}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{16}{25}\right)^{n}=\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{16}{25}\right)^{j+1}\quad(j=n-1)\\
&= \frac{1}{4}\times\frac{16}{25}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{16}{25}\right)^{j}=\frac{1}{4}\times\frac{16}{25}\times\frac{1}{1-\frac{16}{25}}=\frac{1}{4}\times\frac{16}{25}\times\frac{25}{9}=\frac{4}{9}
\end{aligned}$$

$\underline{P(X=k)=\frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}}$: On applique la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(N=n)_{n\geqslant 1}$

$$P(X=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(N=n\cap X=k)$$

Dans cette somme, il est immédiat que les termes $k>n$ sont nuls donc seuls les termes correspondants à $k\leqslant n\Leftrightarrow n\geqslant k$ subsistent (n désigne la variable de sommation et k est fixé) , ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
P\left(X=k\right) &= \sum_{n=k}^{+\infty}P(N=n)P_{(N=n)}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{-k}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}\right)^{k}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^{2n}\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{16}{25}\right)^{n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^{k}}{\left(1-\frac{16}{25}\right)^{k+1}}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^{k}}{\left(\frac{9}{25}\right)^{k+1}}\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^{k}}{\left(\frac{9}{25}\right)^{k}}\times\frac{1}{\frac{9}{25}}=\frac{1}{4}\times\frac{25}{9}\times\left(\frac{\frac{1}{4}\times\frac{16}{25}}{\frac{9}{25}}\right)^{k}=\frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^{k}
\end{aligned}$$

4. La variable X admet une espérance ssi la série $\sum_{n\geqslant 0}nP(X=n)$ converge. Puisque l'on dispose de deux formules pour $P(X=k)$ selon que $k=0$ ou $k\geqslant 1$, on scinde la somme en deux parties

$$\sum_{n\geqslant 0}nP(X=n)=0\times P(X=0)+\sum_{n\geqslant 1}nP(X=n)=\frac{25}{36}\sum_{n\geqslant 1}n\left(\frac{4}{9}\right)^{n}=\frac{25}{36}\times\frac{4}{9}\sum_{n\geqslant 1}n\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=\frac{25}{81}\sum_{n\geqslant 0}n\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

(puisque le terme $n=0$ vaut 0). Cette série est convergente car $\frac{4}{9}\in]-1,1[$ donc X possède une espérance et

$$E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}nP(X=n)=\frac{25}{81}\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=\frac{25}{81}\times\frac{1}{(1-\frac{4}{9})^{2}}=\frac{25}{81}\times\frac{1}{\frac{25}{81}}=1$$