correction de l'exercice 1

Pour la justification de la continuité des fonctions considérées, je laisse le lecteur revoir son cours correspondant ou la feuille d'exercices correspondante.

$\boxed{a}$ La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_1^x (\ln t)dt = a(x)$ est définie et C^1 sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad a'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x (\ln t)dt\right) = \ln x$$

$\boxed{b}$ La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)}$ est continue sur

$$\mathbb{R}\backslash\{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

et $-2 \in]-\infty,-1[$ donc la fonction $x \mapsto \int_{-2}^x \frac{dt}{1-t^2} = b(x)$ est définie et C^1 sur $]-\infty,-1[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-\infty,-1[, \quad b'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-2}^x \frac{dt}{1-t^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}$$

$\boxed{c}$ La fonction

$$t \mapsto \sqrt{t^4-1} = \sqrt{(t^2-1)(t^2+1)} = \sqrt{(t-1)(t+1)(t^2+1)}$$

est continue sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ et $-3 \in]-\infty,-1]$ donc la fonction $x \mapsto \int_{-3}^x \sqrt{t^4-1}dt = c(x)$ est définie et C^1 sur $]-\infty,-1[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-\infty,-1], \quad c'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-3}^x \sqrt{t^4-1}dt\right) = \sqrt{x^4-1}$$

$\boxed{d}$ On commence par utiliser la relation de Chasles pour nous ramener directement à l'énoncé du théorème

$$\int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}dt = -\int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}dt$$

La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}$ est continue sur $]-1,+\infty[$ et $-1 \in]-1,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}dt$ est définie et C^1 sur $]-1,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}dt\right) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$$

Par conséquent, la fonction $d : x \mapsto \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}dt = -\int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}dt$ est définie et C^1 sur $]-1,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad d'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$$

$\boxed{e}$ La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4+1}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ (le dénominateur est la somme de deux réels positifs dont l'un est non nul) et $-1 \in]-\infty,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_{-1}^x \frac{dt}{t^4+1} = e(x)$ est définie et C^1 sur $]-\infty,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-\infty,+\infty[, \quad e'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^x \frac{dt}{t^4+1}\right) = \frac{1}{x^4+1}$$

$\boxed{f}$ La fonction $t \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et $1 \in]0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \exp\left(-\dfrac{1}{t^2}\right) dt = f(x)$ est définie et C^1 sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt\right) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$\boxed{g}$ On commence par utiliser la relation de Chasles pour nous ramener directement à l'énoncé du théorème

$$\int_x^{-4} \sqrt{1+t^2}dt = -\int_{-4}^x \sqrt{1+t^2}dt$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et $-4 \in]-\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-4}^x \sqrt{1+t^2}dt$ est définie et C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-4}^x \sqrt{1+t^2}dt\right) = \sqrt{1+x^2}$$

Par conséquent, la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{-4} \sqrt{1+t^2}dt = -\int_{-4}^x \sqrt{1+t^2}dt$ est définie et C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-\infty, +\infty[, \quad d'(x) = -\sqrt{1+x^2}$$

$\boxed{h}$ La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2-t} = \dfrac{1}{t(1-t)}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $\dfrac{1}{2} \in]0, 1[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{1/2}^x \frac{dt}{t^2-t} = h(x)$ est définie et C^1 sur $]0, 1[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]0, 1[, \quad h'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{1/2}^x \frac{dt}{t^2-t}\right) = \frac{1}{x^2-x}$$

correction de l'exercice 2

On rappelle que pour étudier la parité éventuelle d'une fonction f, il est nécessaire que l'ensemble de définition de f soit symétrique par rapport à 0 et, dans le cas des fonctions définies par des intégrales dépendant des bornes (du type $x \mapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$, on utilise le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $f(-x)$.

Pour finir, remarquons que $u = -t \Leftrightarrow t = -u$ et $dt = -du$ (et l'on n'oublie pas de changer les bornes d'intégration)

$\boxed{a}$ La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{e^t - e^{-t}}$ est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$$(e^t = e^{-t} \Leftrightarrow t = -t \Leftrightarrow 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0)$$

et 0 n'appartient ni à l'intervalle $]-\infty, 0[$, ni à l'intervalle $]0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t - e^{-t}} dt$ n'est pas définie !!

$\boxed{b}$ La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ (le dénominateur est la somme de réels strictement positifs) et $0 \in]-\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}dt$ est définie sur $]-\infty, +\infty[$

<u>Etude du signe</u> : Pour commencer, le signe de $\dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est celui de $e^t - e^{-t}$

$$e^t - e^{-t} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^t \geqslant e^{-t} \Leftrightarrow t \geqslant -t \Leftrightarrow 2t \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0$$

Premier cas $x \geqslant 0$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est positive $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,x] \subset \mathbb{R}_+$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}dt = b(x)$ est positive

Second cas $x \leqslant 0$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$b(x) = \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}dt = -\int_x^0 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}dt$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ est négative sur $\mathbb{R}_-$ donc sur $[x,0] \subset \mathbb{R}_-$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}dt$ portant sur des bornes croissantes ($x \leqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}dt$ est négative, ce qui implique que $b(x) = -\displaystyle\int_x^0 \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}dt$ est positive.

Par conséquent, la fonction b est positive sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Parité de b : Pour commencer, l'ensemble de définition de b est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $b(-x)$, on en déduit que

$$b(-x) = \int_0^{-x} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}dt = \int_0^x \frac{e^{-u} - e^{-(-u)}}{e^{-u} + e^{-(-u)}}(-du) = \int_0^x -\frac{e^{-u} - e^u}{e^{-u} + e^u}du = \int_0^x \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}du = b(x)$$

donc la fonction b est paire.

$\boxed{c}$ La fonction $t \mapsto |t|$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ et $0 \in]-\infty,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x |t|\,dt$ est définie sur $]-\infty,+\infty[$

Etude du signe :

Premier cas $x \geqslant 0$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto |t|$ est positive $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,x] \subset \mathbb{R}_+$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x |t|\,dt = c(x)$ est positive

Second cas $x \leqslant 0$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$c(x) = \int_0^x |t|\,dt = -\int_x^0 |t|\,dt$$

La fonction $t \mapsto |t|$ est positive sur $\mathbb{R}_-$ donc sur $[x,0] \subset \mathbb{R}_-$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 |t|\,dt$ portant sur des bornes croissantes ($x \leqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 |t|\,dt$ est positive, ce qui implique que $c(x) = -\displaystyle\int_x^0 |t|\,dt$ est négative.

Par conséquent, la fonction c est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Parité de c : Pour commencer, l'ensemble de définition de c est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $c(-x)$, on en déduit que

$$c(-x) = \int_0^{-x} |t|\,dt = \int_0^x |-u|\,(-du) = \int_0^x -|u|\,du = -\int_0^x |u|\,du = -c(x)$$

donc la fonction c est impaire.

$\boxed{d}$ La fonction $t \mapsto |t|^3$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ et $1 \in]-\infty,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x |t|^3\,dt$ est définie sur $]-\infty,+\infty[$

Etude du signe :

Premier cas $x \geqslant 1$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto |t|$ est positive $[1, +\infty[$ donc sur $[1, x] \subset [1, +\infty[$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_1^x |t|^3\, dt = d(x)$ est positive

Second cas $x \leqslant 1$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$d(x) = \int_1^x |t|^3\, dt = -\int_x^1 |t|^3\, dt$$

La fonction $t \mapsto |t|^3$ est positive sur $]-\infty, 1]$ donc sur $[x, 1] \subset]-\infty, 1]$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_x^1 |t|^3\, dt$ portant sur des bornes croissantes ($x \leqslant 1$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^1 |t|^3\, dt$ est positive, ce qui implique que $d(x) = -\int_x^1 |t|^3\, dt$ est négative.

Par conséquent, la fonction d est négative sur $]-\infty, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

<u>Parité de d</u> : Pour commencer, l'ensemble de définition de c est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $d(-x)$, on en déduit que

$$d(-x) = \int_1^{-x} |t|^3\, dt = \int_{-1}^{x} |-u|^3\,(-du) = \int_{-1}^{x} -|u|^3\, du = -\int_{-1}^{x} |u|^3\, du \neq \pm d(x) \left(= \pm \int_1^x |u|^3\, du \right)$$

donc la fonction d ne possède pas de parité.

$\boxed{e}$ La fonction $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{t^4+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $0 \in [0, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \dfrac{\sqrt{t}}{t^4+1}$ est définie sur $[0, +\infty[$

<u>Etude du signe</u> : Puisque $x \geqslant 0$, l'intégration porte sur des bornes croissantes et la fonction $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{t^4+1}$ étant positive, on en déduit que l'intégrale $\int_0^x \dfrac{\sqrt{t}}{t^4+1} dt = e(x)$ est positive.

Par conséquent, la fonction e est positive sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+$.

<u>Parité de e</u> : L'ensemble de définition de c n'étant pas symétrique par rapport à 0, on en déduit que e ne peut posséder de parité.

$\boxed{f}$ La fonction $t \mapsto \exp\left(-t^2\right)$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et $1 \in]-\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_1^x \exp\left(-t^2\right) dt$ est définie sur $]-\infty, +\infty[$

<u>Etude du signe</u> :

Premier cas $x \geqslant 1$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t \mapsto \exp\left(-t^2\right)$ est positive $[1, +\infty[$ donc sur $[1, x] \subset [1, +\infty[$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_1^x \exp\left(-t^2\right) = f(x)$ est positive

Second cas $x \leqslant 1$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$f(x) = \int_1^x \exp\left(-t^2\right) dt = -\int_x^1 \exp\left(-t^2\right) dt$$

La fonction $t \mapsto \exp\left(-t^2\right)$ est positive sur $]-\infty, 1]$ donc sur $[x, 1] \subset]-\infty, 1]$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_x^1 \exp\left(-t^2\right) dt$ portant sur des bornes croissantes ($x \leqslant 1$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^1 \exp\left(-t^2\right) dt$ est positive, ce qui implique que $f(x) = -\int_x^1 \exp\left(-t^2\right) dt$ est négative.

Par conséquent, la fonction f est négative sur $]-\infty, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

Parité de f : Pour commencer, l'ensemble de définition de f est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u=-t$ dans l'intégrale définissant $d(-x)$, on en déduit que

$$f(-x)=\int_1^{-x}\exp\left(-t^2\right)dt=\int_{-1}^{x}\exp\left(-(-u)^2\right)(-du)=\int_{-1}^{x}-\exp\left(-u^2\right)du=-\int_{-1}^{x}\exp\left(-u^2\right)du\neq\pm f(x)\left(=\pm\int_1^x\exp\left(-u^2\right)du\right)$$

donc la fonction f ne possède pas de parité.

$\boxed{g}$ La fonction $t\mapsto\sqrt{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ et $0\in]-\infty,+\infty[$ donc la fonction $x\mapsto\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt$ est définie sur $]-\infty,+\infty[$

Etude du signe :

Premier cas $x\geqslant 0$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t\mapsto\sqrt{1+t^2}$ est positive $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,x]\subset\mathbb{R}_+$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x\geqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt=g(x)$ est positive

Second cas $x\leqslant 0$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$g(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt=-\int_x^0\sqrt{1+t^2}dt$$

La fonction $t\mapsto\sqrt{1+t^2}$ est positive sur $\mathbb{R}_-$ donc sur $[x,0]\subset\mathbb{R}_-$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\int_x^0\sqrt{1+t^2}dt$ portant sur des bornes croissantes ($x\leqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_x^0\sqrt{1+t^2}dt$ est positive, ce qui implique que $g(x)=-\int_x^0\sqrt{1+t^2}dt$ est négative.

Par conséquent, la fonction g est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Parité de g : Pour commencer, l'ensemble de définition de g est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u=-t$ dans l'intégrale définissant $g(-x)$, on en déduit que

$$g(-x)=\int_0^{-x}\sqrt{1+t^2}dt=\int_0^x\sqrt{1+(-u)^2}(-du)=\int_0^x-\sqrt{1+u^2}du=-\int_0^x\sqrt{1+u^2}du=-g(x)$$

donc la fonction g est impaire.

$\boxed{h}$ La fonction

$$t\mapsto\frac{1}{1-t^4}=\frac{1}{(1-t^2)(1+t^2)}=\frac{1}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}$$

est continue sur

$$\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}=]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

et $0\in]-1,1[$ donc la fonction $x\mapsto\int_0^x\frac{1}{1-t^4}dt$ est définie sur $]-1,1[$

Etude du signe :

Premier cas $0\leqslant x<1$ (bornes dans l'ordre croissant). La fonction $t\mapsto\frac{1}{1-t^4}$ est positive $[0,1[$ donc sur $[0,x]\subset[0,1[$. En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x\geqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\int_0^x\frac{1}{1-t^4}dt=h(x)$ est positive

Second cas $-1<x\leqslant 0$ (bornes dans l'ordre décroissant). On commence par utiliser la relation de Chasles

$$h(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^4}dt=-\int_x^0\frac{1}{1-t^4}dt$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^4}$ est positive sur $]-1,0]$ donc sur $[x,0] \subset]-1,0]$. En outre, l'intégration dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1-t^4}dt$ portant sur des bornes croissantes ($x \leqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1-t^4}dt$ est positive, ce qui implique que $h(x) = -\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1-t^4}dt$ est négative.

Par conséquent, la fonction h est négative sur $]-1,0]$ et positive sur $[0,1[$.

Parité de h : Pour commencer, l'ensemble de définition de h est symétrique par rapport à 0. Ensuite, en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $g(-x)$, on en déduit que

$$h(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1-t^4}dt = \int_0^{x} \frac{1}{1-(-u)^4}(-du) = \int_0^{x} -\frac{1}{1-u^4}du = -\int_0^{x} \frac{1}{1-u^4}du = -h(x)$$

donc la fonction h est impaire.

correction de l'exercice 3

1. Caractère C^1 : La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ et $0 \in]-\infty,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2} = F(x)$ est C^1 sur $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

   Parité de F : On constate que le domaine de définition de F est symétrique par rapport à 0 et en utilisant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $F(-x)$, on a

   $$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{x} \frac{(-du)}{1+(-u)^2} = \int_0^{x} -\frac{1}{1+u}du = -\int_0^{x} \frac{1}{1+u^2}du = -F(x)$$

   donc la fonction F est impaire.

   Signe de F : Lorsque $x \geqslant 0$ (intégration sur des bornes croissantes). La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est positive sur $[0,+\infty[$ donc sur $[0,x] \subset [0,+\infty[$ En outre, l'intégration portant sur des bornes croissantes ($x \geqslant 0$), on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = F(x)$ est positive

   Puisque F est impaire, on en déduit que $F(x)$ est négatif sur $]-\infty,0]$.

   Par conséquent, la fonction h est négative sur $]-\infty,0]$ et positive sur $[0,+\infty[$.

2. Justification de la première inégalité :

   Les facteurs des deux quotients étant tous positifs, on peut effectuer le produit en croix, ce qui nous donne

   $$\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{2}{(1+t)^2} \Leftrightarrow (1+t)^2 \leqslant 2(1+t^2) \Leftrightarrow 1+2t+t^2 \leqslant 2+2t^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant t^2-2t+1 = (t-1)^2$$

   Cette dernière inégalité étant vraie sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad \dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{2}{(1+t)^2}$

   Justification de la seconde inégalité :

   Puisque x est positif, en intégrant sur $[0,x]$ l'inégalité $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{2}{(1+t)^2}$ (l'intégration portant sur des bornes croissantes), on obtient

   $$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \int_0^x \frac{2}{(1+t)^2}dt \Leftrightarrow F(x) \leqslant 2\int_0^x (1+t)^{-2}dt \Leftrightarrow F(x) \leqslant 2\left[\frac{(1+t)^{-2+1}}{-2+1}\right]_{t=0}^{t=x} \Leftrightarrow F(x) \leqslant 2\left[\frac{-1}{1+t}\right]_{t=0}^{t=x}$$

   $$\Leftrightarrow \quad F(x) \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{\underbrace{1+x}_{\geqslant 0}}\right) \Rightarrow F(x) \leqslant 2$$

3. La question 2 montre que la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}_+$ par 2. Pour montrer que F admet une limite finie en $+\infty$, il suffit de montrer qu'elle est croissante.

D'après la question 1, la fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

donc la fonction F est strictement croissante. Le théorème de monotonie s'applique donc et la fonction F admet une limite finie L en $+\infty$. Pour finir, la fonction F étant majorée sur $\mathbb{R}$ par 2, la limite L est inférieure (au sens large) à 2.

4. La majoration demandée n'est autre que la majoration

$$\forall x \geqslant 0, \quad \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \geqslant \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2}$$

Il suffit donc de montrer que $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant \dfrac{1}{(1+t)^2}$ sur $\mathbb{R}_+$. Les facteurs de ces deux quotients étant strictement positifs, on peut effectuer le produit en croix, ce qui nous donne

$$\frac{1}{1+t^2} \geqslant \frac{1}{(1+t)^2} \Leftrightarrow (1+t)^2 \geqslant 1+t^2 \Leftrightarrow 1+2t+t^2 \geqslant 1+t^2 \Leftrightarrow 2t \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 0$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que la première est également vérifiée sur $\mathbb{R}_+$
Puisque x est positif, en intégrant sur $[0, x]$ l'inégalité $\dfrac{1}{1+t^2} \geqslant \dfrac{1}{(1+t)^2}$ (l'intégration portant alors sur des bornes croissantes), on obtient

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \geqslant \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2} \Leftrightarrow F(x) \geqslant \left[\frac{-1}{1+t}\right]_{t=0}^{t=x} \Leftrightarrow F(x) \geqslant 1 - \frac{1}{1+x}$$

En faisant x vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $L \geqslant 1$.

5. C'est le théorème de bijection qui est demandé.
La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ (car C^1 d'après la question 1) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (sa dérivée étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, cf. question 3), on en déduit que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to-\infty} F(x), \lim_{x\to+\infty} F(x) \right[=]-L, L[.$$

(puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = L$, la parité de F montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -L$).
A la question 4, on a montré que $1 \leqslant L \leqslant 2$ donc $\dfrac{1}{2} \in]-L, L[$ et l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ admet bien une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ (existence et unicité de l'antécédent de $\dfrac{1}{2}$ par F)

6. (a) La fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est aussi C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que la fonction $x \mapsto F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$, ce qui implique que la fonction G est C^1 (donc dérivable) sur $\mathbb{R}_+^\times$. Sa dérivée est donnée par

$$\forall x > 0, \quad G'(x) = F'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

La fonction G étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times =]0, +\infty[$ et sa dérivée étant nulle sur cet intervalle, on en déduit que la fonction G est constante sur $\mathbb{R}_+^\times$.

(b) A la question précédente, on a montré l'existence d'une constante C telle que

$$\forall x > 0, \quad F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = C$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que

$$L + F(0) = C \Leftrightarrow L = C$$

Par conséquent, la limite L est égale à la constante C. En choisissant $x = 1$ dans l'égalité $F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right) = C$, on obtient que $2F(1) = C$ donc $L = 2F(1)$.

correction de l'exercice 4

1. La fonction $s \mapsto \dfrac{s^3}{s^2-1} = \dfrac{s^3}{(s-1)(s+1)}$ est continue sur
$$\mathbb{R}\backslash\{-1,1\} =]-\infty,1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$
et $2 \in]1,+\infty[$ donc la fonction F est définie et C^1 sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad F'(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

2. Il suffit de montrer que $\forall s \geqslant 2, \quad s \leqslant \dfrac{s^3}{s^2-1} \leqslant s + \dfrac{1}{s-1}$.
$$s \leqslant \frac{s^3}{s^2-1} \leqslant s+\frac{1}{s-1} \underset{s^2-1>0}{\Leftrightarrow} s^3 - s \leqslant s^3 \leqslant \left(s+\frac{1}{s-1}\right)(s^2-1) \Leftrightarrow s^3-s \leqslant s^3 \leqslant s^3+1 \Leftrightarrow -s \leqslant 0 \leqslant 1$$
Ce dernier encadrement étant vrai sur $[2,+\infty[$, on en déduit que l'inégalité demandée est vraie sur $[2,+\infty[$.
Puisque $x \geqslant 2$, en intégrant l'inégalité donnée sur $[2,+\infty[$ (l'intégration portant sur des bornes croissantes), on obtient
$$\forall x \geqslant 2, \quad \int_2^x ds \leqslant \int_2^x \frac{s^2}{s^2-1}ds \leqslant \int_2^x \left(s+\frac{1}{s-1}\right)ds \Leftrightarrow \left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=2}^{s=x} \leqslant F(x) \leqslant \left[\frac{s^2}{2}+\ln|s-1|\right]_{s=2}^{s=x}$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall x \geqslant 2, \quad \frac{x^2}{2} - 2 \leqslant F(x) \leqslant \frac{x^2}{2} + \ln(x-1) - 2$$
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{2}-2\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln|x-1|-2\right) = +\infty$, le théorème d'encadrement montre que
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$$
En divisant l'encadrement précédent par x^2, on obtient l'encadrement suivant
$$\forall x \geqslant 2, \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \leqslant \frac{F(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{\ln(x-1)}{x^2} - \frac{2}{x^2}$$
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(x-1)}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}$, le théorème d'encadrement montre que
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

correction de l'exercice 5

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt = F(x)$ est définie et C^1 sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$. L'intégrale $G(x)$ existe donc si et seulement x et $\dfrac{1}{x}$ appartiennent à $]0,+\infty[$, c'est-à-dire si $x \in]0,+\infty[$ donc $\mathcal{D}_G =]0,+\infty[$.
En utilsant la relation de Chasles par rapport au point 1, on a
$$G(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt - \int_1^{1/x}\frac{\ln t}{1+t^2}dt = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. La fonction F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est aussi C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que la fonction $x \mapsto F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$, ce qui implique que la fonction G est C^1 (donc dérivable) sur $\mathbb{R}_+^\times$. Sa dérivée est donnée par
$$\forall x > 0, \quad G'(x) = F'(x) - \left(\frac{1}{x}\right)' F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x}{1+x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{-\ln x}{1+x^2} = 0$$

La fonction G étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times =]0,+\infty[$ et sa dérivée étant nulle sur cet intervalle, on en déduit que la fonction G est constante sur $\mathbb{R}_+^\times$. Pour expliciter la constante, il suffit d'évaluer G en $x=1$. Or l'intégrale $G(1) = \int_1^1 \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ est nulle donc la fonction G est nulle.

correction de l'exercice 6

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$. Par conséquent, l'intégrale $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ existe si et seulement x et $2x$ appartiennent à $]-\infty,+\infty[$, ce qui est toujours le cas donc F est définie sur $]-\infty,+\infty[$.

2. Pour justifier cet encadrement sur $\mathbb{R}_+$, nous allons procéder par équivalence, en passant à l'inverse (puisque chaque membre de l'encadrement est positif) puis en élevant au carré (toujours la même raison)

$$\frac{1}{t+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \frac{1}{t} \Leftrightarrow t \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant t+1 \Leftrightarrow t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant (t+1)^2 \Leftrightarrow t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$$

Ce dernier encadrement étant évidemment vrai sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\forall t \geqslant 0 \quad \frac{1}{t+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \frac{1}{t}$.
Puisque $x \leqslant 2x$ (car $x \geqslant 0$), en intégrant sur $[x,2x]$, l'intégration portant sur des bornes croissantes, on obtient

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}dt \quad \leqslant \quad \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow [\ln|t+1|]_{t=x}^{t=2x} \leqslant F(x) \leqslant [\ln|t|]_{t=x}^{t=2x} \Leftrightarrow \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant F(x) \leqslant \ln(2x) - \ln$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant F(x) \leqslant \ln\left(\frac{2x}{x}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant F(x) \leqslant \ln 2$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 = 2$ (sic), le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ln 2$.

3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$ et $0 \in]-\infty,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = G(x)$ est définie et C^1 (donc dérivable) sur $]-\infty,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

En utilisant la relation de Chasles pour l'intégrale $F(x)$, on a

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_0^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt - \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = G(2x) - G(x)$$

Puisque G est C^1 sur $\mathbb{R}$, la formule précédente montre clairement de F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = (2x)'G'(2x) - G'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

correction de l'exercice 7

1. Domaine de définition : La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$. Par conséquent, l'intégrale $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$ existe si et seulement x et $2x$ appartiennent à $]-\infty,+\infty[$, ce qui est toujours le cas donc Φ est définie sur $]-\infty,+\infty[$.
Parité : Le domaine de définition de Φ est symétrique par rapport à 0. En effectuant le changement de variable $u=-t$ dans l'intégrale $\Phi(-x)$, on a

$$\Phi(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^4}}dt = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(-u)^4}}(-du) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+u^4}}du = -\Phi(x)$$

donc la fonction Φ est impaire.

2. On encadre "à la main" la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ sur l'intervalle $[x, 2x]$

$$\begin{aligned} x & \leqslant t \leqslant 2x \Rightarrow x^4 \leqslant t^4 \leqslant 16x^4 \Rightarrow 4+x^4 \leqslant 4+t^4 \leqslant 4+16x^4 \Rightarrow \sqrt{4+x^4} \leqslant \sqrt{4+t^4} \leqslant \sqrt{4+16x^4} \\ & \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4+t^4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} \qquad \forall t \in [x, 2x] \end{aligned}$$

Puisque $x \leqslant 2x$ (car $x \geqslant 0$), en intégrant l'inégalité précédente sur $[x, 2x]$ (l'intégration portant sur des bornes croissantes), on obtient

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+16x^4}} & \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+x^4}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4+16x^4}} \int_x^{2x} dt \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} \int_x^{2x} dt \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{4+16x^4}} [t]_{t=x}^{t=2x} dt \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} [t]_{t=x}^{t=2x} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{4+x^4}} \end{aligned}$$

Puisque l'on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} & = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{16x^4\left(\frac{1}{4x^4}+1\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4x^2\sqrt{\frac{1}{4x^4}+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^4}} & = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4\left(\frac{4}{x^4}+1\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2\sqrt{\frac{4}{x^4}+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned}$$

le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0$.

3. On considère la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4+t^4}}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$ et $0 \in]-\infty, +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} = F(x)$ est définie et C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}$$

En utilisant la relation de Chasles dans l'intégrale $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$, on a

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} = \int_0^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}} = F(2x) - F(x)$$

Puisque F est C^1 sur $\mathbb{R}$, la formule précédente montre clairement de Φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(x) = (2x)'F'(2x) - F'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \frac{2}{\sqrt{4+(2x)^4+1}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^4}} = \frac{2}{\sqrt{4+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}$$