correction de l'exercice 1
Nous utiliserons la caractérisation des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel.
$\boxed{A}$: $A \subset \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel mais il ne contient pas $0_{2,1}$ (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) car $0+0 \neq 1$ (il parait même que le résultat est égal à la tête à toto :-)) donc A n'est pas un espace vectoriel (un espace vectoriel contient nécessairement le vecteur nul).
$\boxed{B}$: $B \subset \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
$B \neq \emptyset$: $0_{3,1} \in B$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car $2\times 0 - 5\times 0 + 0 = 0$ et $0+0=0$
Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de B ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in B$, c'est-à-dire que soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} 2x-5y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} 2x'-5y'+z'=0 \\ y'+z'=0 \end{cases}$, il faut montrer que $\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$ appartient à B, i.e.$\begin{cases} 2(\lambda x + \mu x') - 5(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = 0 \\ (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = 0 \end{cases}$
Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ.

$$\begin{aligned} 2(\lambda x + \mu x') - 5(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') &= \lambda(2x + -5\lambda y + z) + \mu(2x' - 5y' + z') = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \\ (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') &= \lambda(y+z) + \mu(y'+z') = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que B est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble B est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble B est défini par des relations sur les coordonnées.*
$\boxed{C}$: $C \subset \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel mais il ne contient pas $0_{3,1}$ (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car $0+0-2\times 0 = 0 \neq -1$ donc C n'est pas un espace vectoriel (un espace vectoriel contient nécessairement le vecteur nul)
$\boxed{D}$: $D \subset \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
$D \neq \emptyset$ puisqu'il contient $0_{2,1}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car $0^2 + 0 = 0$.
Stabilité par combinaison linéaire : Soient $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux éléments de D ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in D$, c'est-à-dire que soient $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b = 0$ et $X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ avec $(a')^2 + b' = 0$, il faut montrer que $\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' \\ \lambda b + \mu b' \end{pmatrix}$ appartient à B, i.e. $(\lambda a + \mu a')^2 + (\lambda b + \mu b') = 0$.
Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$(\lambda a + \mu a')^2 + \lambda b + \mu b' = \lambda^2 a^2 + 2\lambda\mu a a' + \mu^2 (a')^2 + \lambda b + \mu b'$$

On ne voit aucune simplification possible et les termes de la somme n'étant pas linéaire en λ, μ, on se dit que D ne doit pas être un espace vectoriel. Pour le justifier, il suffit de trouver un contre-exemple. On considère le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui appartient à D car $1^2 + (-1) = 0$. Par contre, le vecteur $2X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à D car $2^2 + (-2) = 2 \neq 0$ donc D n'est pas un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble D est défini par des relations sur les coordonnées.*
$\boxed{E}$: $E \subset \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $E \neq \emptyset$ puisqu'il contient $0_{3,1}$ (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car $0_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix}$ avec $a = b = 0$ donc $0_{3,1} \in E$.
Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de E ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in E$, c'est-à-dire que soient $X = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} a' \\ a'+b' \\ b' \end{pmatrix}$, il faut montrer que $\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' \\ \lambda(a+b) + \mu(a'+b') \\ \lambda b + \mu b' \end{pmatrix}$ appartient à E, En développant et en regroupan les termes en λ et les termes en μ, on obtient

$$\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' \\ \lambda(a+b) + \mu(a'+b') \\ \lambda b + \mu b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' \\ \lambda(a+b) + \mu(a'+b') \\ \lambda b + \mu b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \lambda a + \mu a' \text{ et } \beta = \lambda b + \mu b'$$

donc $\lambda X + \mu X' \in E$ ce qui montre que E est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble E est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble E est défini par des relations sur les coordonnées. Par contre, l'ensemble E est défini par la forme de ses éléments et non des équations « basiques »*

$\boxed{F}$: $F \subset \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $E \neq \emptyset$ puisqu'il contient $0_{4,1}$ (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car $0_{4,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ a+b \\ b \end{pmatrix}$ avec $a = b = 0$ donc $0_{4,1} \in F$.

Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de F ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in F$, c'est-à-dire que soient $X = \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ a+b \\ b \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} a' \\ a'-b' \\ a'+b' \\ b' \end{pmatrix}$, il faut montrer que $\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' \\ \lambda(a-b) + \mu(a'-b') \\ \lambda(a+b) + \mu(a'+b') \\ \lambda b + \mu b' \end{pmatrix}$ appartient à F, En développant et en regroupan les termes en λ et les termes en μ, on obtient

$$\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' \\ (\lambda a + \mu a') - (\lambda b + \mu b') \\ (\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b') \\ \lambda b + \mu b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' \\ (\lambda a + \mu a') - (\lambda b + \mu b') \\ (\lambda a + \mu a') + (\lambda b + \mu b') \\ \lambda b + \mu b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \\ \beta \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \lambda a + \mu a' \text{ et } \beta = \lambda b + \mu b'$$

ce qui montre que F est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble F est bien un espace vectoriel.

Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble F est défini par des relations sur les coordonnées. Par contre, l'ensemble F est défini par la forme de ses éléments et non des équations « basiques »*

$\boxed{G}$: $G \subset \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel et $G \neq \emptyset$ puisqu'il contient $0_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) car

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de G ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in G$, c'est-à-dire que soient $X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 3X$ et $X' \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X' = 3X'$, il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} (\lambda X + \mu X') = 3(\lambda X + \mu X')$.

Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} (\lambda X + \mu X') = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + \mu \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X' = \lambda(3X) + \mu(3X') = 3(\lambda X + \mu X')$$

ce qui montre que G est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble G est bien un espace vectoriel.

Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble G est défini par des relations sur l'élément X directement.*

$\boxed{H}$: $H \subset \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel mais il ne contient pas $0_{2,1}$ (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) puisque l'on a :

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc H n'est pas un espace vectoriel.

Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble H est défini par des relations sur l'élément X directement.*

$\boxed{K}$: $K \subset \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel et $G \neq \emptyset$ puisqu'il contient $0_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de K ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in K$, c'est-à-dire que soient $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = X$ et $X' \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X' = X'$, il faut montrer que $\lambda X + \mu X' \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} (\lambda X + \mu X') = (\lambda X + \mu X')$.

Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}(\lambda X+\mu X')=\lambda\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}X+\mu\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}X'=\lambda(X)+\mu(X')=(\lambda X+\mu X')$$

ce qui montre que K est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble K est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble K est défini par des relations sur l'élément X directement.*
$\boxed{L}$: $L\subset\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $L\neq\emptyset$ puisqu'il contient 0_2 (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$) car $0_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}$ avec $a=0$ donc $0_2\in L$.
Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de L ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X+\mu X'\in L$, c'est-à-dire que soient $X=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}0&a'\\-a'&0\end{pmatrix}$, il faut montrer que $\lambda X+\mu X'=\begin{pmatrix}0&\lambda a+\mu a'\\-\lambda a-\mu a'&0\end{pmatrix}$ appartient à L, On a

$$\lambda X+\mu X'=\begin{pmatrix}0&\lambda a+\mu a'\\-\lambda a-\mu a'&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\alpha\\-\alpha&0\end{pmatrix}\text{ avec }\alpha=\lambda a+\mu a'$$

donc $\lambda X+\mu X'\in L$ ce qui montre que L est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble L est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble L est défini par des relations sur les coordonnées. Par contre, l'ensemble L est défini par la forme de ses éléments et non des équations « basiques »*
$\boxed{M}$: $M\subset\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $M\neq\emptyset$ puisqu'il contient 0_2 (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$) car $0_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$ avec $a=b=0$ donc $0_2\in M$
Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de M ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X+\mu X'\in M$, c'est-à-dire que soient $X=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$, il faut montrer que $\lambda X+\mu X'=\begin{pmatrix}\lambda a+\mu a'&\lambda b+\mu b'\\\lambda b'+\mu b'&\lambda a+\mu a'\end{pmatrix}$ appartient à M. On a

$$\lambda X+\mu X'=\begin{pmatrix}\lambda a+\mu a'&\lambda b+\mu b'\\\lambda b'+\mu b'&\lambda a+\mu a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}\text{ avec }\alpha=\lambda a+\mu a'\text{ et }\beta=\lambda b+\mu b'$$

donc $\lambda X+\mu X'\in M$ ce qui montre que M est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble M est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble M est défini par des relations sur les coordonnées. Par contre, l'ensemble M est défini par la forme de ses éléments et non des équations « basiques »*
$\boxed{N}$: $N\subset\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
$N\neq\emptyset$ puisqu'il contient 0_2 (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$) car $0_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&ab\end{pmatrix}$ avec $a=b=0$ donc $0_2\in N$
Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de N ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X+\mu X'\in N$, c'est-à-dire que soient $X=\begin{pmatrix}a&0\\0&ab\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}a'&0\\0&a'b'\end{pmatrix}$, il faut montrer que $\lambda X+\mu X'=\begin{pmatrix}\lambda a+\mu a'&0\\0&\lambda ab+\mu a'b'\end{pmatrix}$ appartient à N. Cela revient à dire que le coefficient $(2,2)$ de cette matrice est toujours un multiple du coefficient $(1,1)$, ce qui semble difficile. Pour le justifier, il suffit de trouver un contre-exemple. Après quelques tatonnements, on trouve $X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $X+X'=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$ et 2 ne peut être un multiple de 0 ($a=0$, $ab=2$) donc N n'est pas un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble N est défini par des relations sur les coordonnées. Par contre, l'ensemble N est défini par la forme de ses éléments et non des équations « basiques »*
$\boxed{O}$: $O\subset\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $O\neq\emptyset$ puisqu'il contient 0_3 (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$) car $0_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$ avec $a=b=c=0$ donc $0_3\in O$
Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de O ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X+\mu X'\in O$, c'est-à-dire que soient $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix}a'&b'&c'\\c'&a'&b'\\b'&c'&a'\end{pmatrix}$, il faut montrer que $\lambda X+\mu X'=$

$\begin{pmatrix} \lambda a+\mu a' & \lambda b+\mu b' & \lambda c+\mu c' \\ \lambda c+\mu c' & \lambda a+\mu a' & \lambda b+\mu b' \\ \lambda b+\mu b' & \lambda c+\mu c' & \lambda a+\mu a' \end{pmatrix}$ appartient à O, ce qui est ce qui est immédiat car

$$\begin{aligned} \lambda X+\mu X' &= \begin{pmatrix} \lambda a+\mu a' & \lambda b+\mu b' & \lambda c+\mu c' \\ \lambda c+\mu c' & \lambda a+\mu a' & \lambda b+\mu b' \\ \lambda b+\mu b' & \lambda c+\mu c' & \lambda a+\mu a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \\ \text{avec } \alpha &= \lambda a+\mu a',\ \beta=\lambda b+\mu b',\ \gamma=\lambda c+\mu c' \end{aligned}$$

donc $\lambda X+\mu X' \in O$. Ainsi, O est stable par combinaison linéaire et par conséquent, l'ensemble O est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble O est défini par des relations sur les coordonnées. Par contre, l'ensemble O est défini par la forme de ses éléments et non des équations « basiques »*

$\boxed{P}$: $P \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel et $P \neq \emptyset$ puisqu'il contient $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$) car

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de P ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X+\mu X' \in P$, c'est-à-dire que soient $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $X' \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X' = X' \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, il faut montrer que $\lambda X+\mu X' \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(\lambda X+\mu X') = (\lambda X+\mu X')\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(\lambda X+\mu X') = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + \mu \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X' = \lambda X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \mu X' \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (\lambda X+\mu X')\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ce qui montre que P est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble P est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble P est défini par des relations sur l'élément X directement.*

$\boxed{Q}$: $Q \subset \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel et $Q \neq \emptyset$ puisqu'il contient $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$) car

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$$

Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de Q ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X+\mu X' \in Q$, c'est-à-dire que soient $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0_2$ et $X' \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X' + X' \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0_2$, il faut montrer que $\lambda X+\mu X' \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(\lambda X+\mu X') + (\lambda X+\mu X')\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0_2$.
Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(\lambda X+\mu X') + (\lambda X+\mu X')\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} &= \left[\lambda \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + \mu \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X'\right] + \left[\lambda X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \mu X' \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right] \\ &= \lambda \left\{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\} + \lambda \left\{\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X' + X' \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \lambda \times 0_2 + \mu 0_2 = 0_2 \end{aligned}$$

ce qui montre que Q est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble Q est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble Q est défini par des relations sur l'élément X directement.*

correction de l'exercice 2

$\boxed{A}$: A est une combinaison linéaire de e_1, e_2 si et seulement si il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$A = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 3 \\ -\lambda_1+\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 &= 3 \\ 2\lambda_2 &= 4 \\ -3\lambda_2 &= -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A = e_1 + 2e_2$$

$\boxed{B}$: B est une combinaison linéaire de e_1, e_2 si et seulement si il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$B = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = 4 \\ -\lambda_1+\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 &= 4 & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ 2\lambda_2 &= 5 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -3\lambda_2 &= -6 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 &= 4 & \\ 2\lambda_2 &= 5 & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 &= -1 & L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2 \end{cases}$$

ce qui est impossible donc B n'est pas une combinaison linéaire de e_1, e_2.

$\boxed{C}$: C est une combinaison linéaire de e_1, e_2 si et seulement si il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$C = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 = 10 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = -4 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 10 \\ 2\lambda_2 & = & 6 \\ -3\lambda_2 & = & -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow C = 7e_1 + 3e_2$$

$\boxed{D}$: D est une combinaison linéaire de e_1, e_2 si et seulement si il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$D = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = -3 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & -1 & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ 2\lambda_2 & = & -4 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -3\lambda_2 & = & 6 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow D = e_1 - 2e_2$$

$\boxed{E}$: E est une combinaison linéaire de e_1, e_2 si et seulement si il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$E = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = -5 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ 2\lambda_2 & = & -4 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -3\lambda_2 & = & 6 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow E = 3e_1 - 2e_2$$

$\boxed{F}$: B est une combinaison linéaire de e_1, e_2 si et seulement si il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$B = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 = 10 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = -2 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 10 & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ 2\lambda_2 & = & 8 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -3\lambda_2 & = & -11 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & 10 & \\ 2\lambda_2 & = & 8 & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 & = & -8 & L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2 \end{array}\right.$$

ce qui est impossible donc F n'est pas une combinaison linéaire de e_1, e_2.

correction de l'exercice 3

1. Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1, e_2 et e_3 si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que
$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$
Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.
$$\left\{\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & y - x & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ \lambda_3 & = & z - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_3 & = & z - y \\ \lambda_2 & = & 2y - x - z \\ \lambda_1 & = & 2x - y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 2x - y \\ \lambda_2 & = & -x + 2y - z \\ \lambda_3 & = & -y + z \end{array}\right.$$
Par conséquent, tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3, la combinaison est unique et elle donnée par
$$X = (2x - y)e_1 + (-x + 2y - z)e_2 + (-y + z)e_3$$

2. Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1, e_2 si et seulement il existe deux réels λ_1, λ_2 tels que
$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$
Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2 que l'on résout par pivot de Gauss.
$$\left\{\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ \lambda_2 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & x & \\ \lambda_2 & = & y - x & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 & = & z - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$
Par conséquent, ce système n'admet pas toujours des solutions, c'est le cas ssi $z - y \neq 0$. Par exemple, le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas une combinaison linéaire de e_1, e_2.

3. Le vecteur X est une combinaison linéaire de trois vecteurs e_1, e_2 et $\widetilde{e_3}$ si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que
$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 \widetilde{e_3}.$$
Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.
$$\left\{\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & y - x & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 & = & z - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$
Par conséquent, ce système n'admet pas toujours des solutions, c'est le cas ssi $z - y \neq 0$. Par exemple, le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \widetilde{e_3}$.

4. Le vecteur X est une combinaison linéaire de quatre vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si et seulement il existe quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que
$$X = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 que l'on résout par pivot de Gauss.
$$\left\{\begin{array}{lcc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 & = & y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lccl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lccl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & y - x & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 & = & z - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$
Par conséquent, ce système n'admet pas toujours des solutions, c'est le cas ssi $z - y \neq 0$. Par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

correction de l'exercice 4

Rappellons qu'une base $(e_1, .., e_r)$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une famille telle que tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $(e_1, .., e_r)$ et que cette combinaison est unique. Autrement dit, le système linéaire en $\lambda_1, .., \lambda_r$ induit par l'égalité $X = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$ doit être un système (S_r) admet une et une seule solution, c'est-à-dire qu'il doit être de Cramer. Le système (S_r) est à r inconnues et 3 équations et l'on sait qu'un système de Cramer est nécessairement carré (la réciproque est fausse !!). Par conséquent, pour que la famille $(e_1, .., e_r)$ soit une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il est indispensable que $r = 3$ (la réciproque est fausse).
De cette analyse, on en déduit immédiatement que les familles $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_5$ ne peuvent être des bases.Il reste à traiter les trois autres familles.
$\boxed{\mathcal{B}_2}$ Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1, e_2 et e_3 si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que
$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$
Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2

et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3 &= x \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 &= y \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3 &= x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ -2\lambda_2-2\lambda_3 &= y-x & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ -2\lambda_2-2\lambda_3 &= z-x & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3 &= x & \\ -2\lambda_2-2\lambda_3 &= y-x & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 &= z-y & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

Ce système n'admet donc aucune solution lorsque $z-y \neq 0$. Par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ n'est pas une combinaison linéaire de la famille (e_1,e_2,e_3) donc $\mathcal{B}_2$ n'est pas une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$\boxed{\mathcal{B}_3}$ Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1,e_2 et e_3 si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$X=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3.$$

Si l'on considère les coordonnées de $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1,λ_2 et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_3 &= x \\ \lambda_2+\lambda_3 &= y \\ \lambda_1+\lambda_2 &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_3 &= x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ \lambda_2+\lambda_3 &= y & \\ \lambda_2-\lambda_3 &= z-x & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_3 &= x & \\ \lambda_2+\lambda_3 &= y & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ -2\lambda_3 &= z-x-y & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{cases}$$

Par conséquent, le système est de Cramer (système triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls) donc la famille $\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$\boxed{\mathcal{B}_4}$ Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1,e_2 et e_3 si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$X=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3.$$

Si l'on considère les coordonnées de $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1,λ_2 et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= x \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 &= y \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &= x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ -2\lambda_2 &= y-x & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ -2\lambda_3 &= z-x & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

Par conséquent, le système est de Cramer (système triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls) donc la famille $\mathcal{B}_4$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

correction de l'exercice 5

1. **Première méthode** (par caractérisation des sous-espaces vectoriels)
   $F \subset \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel et $F \neq \emptyset$ puisqu'il contient $0_{3,1}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car

$$\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

   Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de F ainsi que deux réels λ et μ. Il faut montrer que $\lambda X+\mu X' \in F$, c'est-à-dire que soient $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\2&-4&4\end{pmatrix}X=2X$ et $X' \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\2&-4&4\end{pmatrix}X'=2X'$, il faut montrer que $\lambda X+\mu X' \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\2&-4&4\end{pmatrix}(\lambda X+\mu X')=2(\lambda X+\mu X')$.
   Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\2&-4&4\end{pmatrix}(\lambda X+\mu X')=\lambda\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\2&-4&4\end{pmatrix}X+\mu\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\2&-4&4\end{pmatrix}X'=\lambda(2X)+\mu(2X')=2(\lambda X+\mu X')$$

   ce qui montre que F est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble F est bien un espace vectoriel.
   Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble F est défini par des relations sur l'élément X directement.*

Seconde méthode (par espace engendré par une partie)

$$X \in F \Leftrightarrow X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} X = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b+c=2a \\ 2a-2b+2c=2b \\ 2a-4b+4c=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c=0 \\ 2a-4b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+c=0 \\ 0=0 \end{cases} \begin{matrix} \textit{Pivot pour } a \\ L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \{a = 2b-c \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2b-c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Par conséquent, $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est un espace vectoriel

2. D'après la seconde méthode, la famille $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est une famille génératrice de F et pour montrer qu'il s'agit d'une base, il suffit de montrer qu'elle est libre

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha-\beta=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$$

Par conséquent, la famille $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est bien une base de F.

correction de l'exercice 6

On procède par les espaces engendrés par une partie.

$\boxed{B}$: $X \in F \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\begin{cases} 2a-5b+c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3c \\ b=-c \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -3c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $B = \text{Vect}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un espace vectoriel dont une base est $\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (un vecteur non nul !)

$\boxed{E}$: $X \in E \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

donc $E = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est un espace vectoriel. Montrons que la famille génératrice obtenue est libre

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=0$$

ainsi la famille $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de E.

$\boxed{F}$: $X \in F \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ a-b \\ a+b \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

donc $F = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est un espace vectoriel. Montrons que la famille génératrice elle est libre

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 0\\ \alpha - \beta = 0\\ \alpha + \beta = 0\\ \beta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

ainsi la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de F.

$\boxed{G}$:$X \in G \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a + 5b = 3a\\ a + 3b = 3b\end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow X = 0_{2,1}$$

donc $G = \{0_{2,1}\}$ est un espace vectoriel nul.

$\boxed{K}$: $K \subset \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel et $G \neq \emptyset$ puisqu'il contient $0_{3,1} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$X \in G \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a + 2b + 3c = a\\ 3a + b + 2c = b\\ 2a + 3b + c = c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2b + 3c = 0\\ 3a + 2c = 0\\ 2a + 3b = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a + 2c = 0\\ 2b + 3c = 0\\ 2a + 3b = 0\end{cases} \left|\ L_1 \leftrightarrow L_2\right. \Leftrightarrow \begin{cases}3a + 2c = 0\\ 2b + 3c = 0\\ 9b - 4c = 0\end{cases} \left|\ \begin{array}{l}\text{«\textit{Pivot pour a}»}\\ \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3a + 2c = 0\\ 2b + 3c = 0\\ -31c = 0\end{cases} \left|\ \begin{array}{l}\text{«\textit{Pivot pour b}»}\\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 9L_2\end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Leftrightarrow X = 0_{2,1}$$

donc $K = \{0_{3,1}\}$ est un espace vectoriel nul.

$\boxed{L}$: $X \in L \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}0 & a\\-a & 0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ donc $L = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ est un espace vectoriel dont une base est $\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$ (vecteur non nul !)

$\boxed{M}$: $X \in M \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}a & b\\b & a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

donc $M = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ est un espace vectoriel. Montrons que la famille génératrice obtenue est libre

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\b & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = 0$$

ainsi la famille $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ est une base de M.

$\boxed{O}$: $X \in O \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}a & b & c\\c & a & b\\b & c & a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ donc $O = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ est un espace vectoriel. Montrons que la famille génératrice obtenue est libre

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=b=c$$

ainsi la famille $\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$ est une base de O

$\boxed{P}$: $X\in P\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2a+5c&2b+5d\\a+3c&b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+b&5a+3b\\2c+d&5c+3d\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}2a+5c=2a+b\\2b+5d=5a+3b\\a+3c=2c+d\\b+3d=5c+3d\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}b-5c=0\\5a+b-5d=0\\a+c-d=0\\b-5c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a+c-d=0\\5a+b-5d=0\\b-5c=0\end{array}\right.\left|\ L_1\longleftrightarrow L_3\right.\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a+c-d=0\\b-5c=0\\b-5c=0\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\text{«}\textit{Pivot pour } a\text{»}\\L_2\leftarrow L_2-5L_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a+c-d=0\\b-5c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}b=5c\\a=-c+d\end{array}\right.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $X=\begin{pmatrix}-c+d&5c\\c&d\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-1&5\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow X\in\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1&5\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ donc $P=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1&5\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$. Montrons que la famille génératrice obtenue est libre

$$c\begin{pmatrix}-1&5\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-c+d&5c\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-c+d=0\\5c=0\\c=0\\d=0\end{array}\right.\Leftrightarrow c=d=0$$

ainsi la famille $\left\{\begin{pmatrix}-1&5\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de P

$\boxed{Q}$: $X\in Q\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4a+b+5c&5a+5b+5d\\a+5c+d&b+5c+6d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}4a+b+5c=0\\5a+5b+5d=0\\a+5c+d=0\\b+5c+6d=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}4a+b+5c=0\\15b-25c+20d=0\\-b+15c+4d=0\\b+5c+6d=0\end{array}\right.\left|\begin{array}{c}\text{«}\textit{Pivot pour } a\text{»}\\L_2\leftarrow 4L_2-5L_1\\L_3\leftarrow 4L_3-L_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}4a+b+5c=0\\3b-5c+4d=0\\-b+15c+4d=0\\b+5c+6d=0\end{array}\right.\left|\ L_2\leftarrow\frac{1}{5}L_2\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}4a+b+5c=0\\3b-5c+4d=0\\40c+16d=0\\20c+14d=0\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\text{«}\textit{Pivot pour } b\text{»}\\L_3\leftarrow 3L_3+L_2\\L_4\leftarrow 3L_4-L_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}4a+b+5c=0\\3b-5c+4d=0\\5c+2d=0\\10c+7d=0\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}L_3\leftarrow\frac{1}{8}L_3\\L_4\leftarrow\frac{1}{2}L_4\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}4a+b+5c=0\\3b-5c+4d=0\\5c+2d=0\\3d=0\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}\text{«}\textit{Pivot pour } c\text{»}\\L_4\leftarrow L_4-2L_3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}d=0\\c=0\\b=0\\a=0\end{array}\right.\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

donc $Q=\{0_2\}$ est un espace vectoriel nul.