correction de l'exercice 1

1.
$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in A\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}2a-5b+c=0\\b+c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}b=-c\\a=-3c\end{array}\right.\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-3c\\-c\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ engendre A et ce vecteur étant non nul, il forme une base de A.

2.
$$X=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix}\in B\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha+\gamma-2\delta=0\\\alpha+\beta+\delta=0\\2\alpha-\beta+3\gamma=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cc}\alpha+\gamma-2\delta=0&\textit{Pivot pour }\alpha\\\beta-\gamma+3\delta=0&L_2\leftarrow L_2-L_1\\-\beta+\gamma+4\delta=0&L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{cc}\alpha+\gamma-2\delta=0&\\\beta-\gamma+3\delta=0&\textit{Pivot pour }\beta\\7\delta=0&L_3\leftarrow L_3+L_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\delta=0\\\beta=\gamma\\\alpha=-\gamma\end{array}\right.\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-\gamma\\\gamma\\\gamma\\0\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ engendre B et ce vecteur étant non nul, il forme une base de B.

3.
$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in C\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}4a-2b+c&=&0\\-2a+4b+c&=&0\\a+b+c&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rclc}4a-2b+c&=&0&\textit{Pivot pour }a\\6b+3c&=&0&L_2\leftarrow 2L_2+L_1\\6b+3c&=&0&L_3\leftarrow 4L_3-L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rclc}4a-2b+c&=&0&\\6b+3c&=&0&\textit{Pivot pour }b\\0&=&0&L_3\leftarrow L_3-L_2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a=-\dfrac{1}{2}c\\b=-\dfrac{1}{2}c\end{array}\right.\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-\dfrac{c}{2}\\-\dfrac{c}{2}\\c\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ engendre C et ce vecteur étant non nul, il forme une base de C.

4.
$$X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in D\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}a+2b+2c&=&-a\\2a+b+2c&=&-b\\2a+2b+c&=&-c\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}2a+2b+2c&=&0\\2a+2b+2c&=&0\\2a+2b+2c&=&0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\{2a+2b+2c=0\Leftrightarrow\{a=-b-c\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-b-c\\b\\c\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Par conséquent, tout vecteur de D est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, donc $D=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Etudions la liberté de cette famille génératrice. Soient deux réels a,b tels que

$$a\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0_{\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-a-b\\a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-a-b=0\\a=0\\b=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}a=0\\b=0\end{array}\right.$$

donc la famille génératrice $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ est libre donc c'est une base de D.

5.

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+2b+3c &=& 6a \\ 3a+b+2c &=& 6b \\ 2a+3b+c &=& 6c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -5a+2b+3c &=& 0 \\ 3a-5b+2c &=& 0 \\ 2a+3b-5c &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -5a+2b+3c &=& 0 & \textit{Pivot pour } a \\ -19b+19c &=& 0 & L_2 \leftarrow 5L_2+3L_1 \\ 19b-19c &=& 0 & L_3 \leftarrow 5L_3+2L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -5a+2b+3c &=& 0 & \\ -19b+19c &=& 0 & \textit{Pivot pour } b \\ 0 &=& 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=c \\ a=c \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre E et ce vecteur étant non nul, il forme une base de E.

6.

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3a+b+c &=& 4a \\ 4b &=& 4b \\ -a+b+5c &=& 4c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -a+b+c &=& 0 \\ 0 &=& 0 \\ -a+b+c &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ -a+b+c=0 \right. \Leftrightarrow \left\{ a=b+c \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, tout vecteur de F est combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $F = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Etudions la liberté de cette famille génératrice. Soient deux réels a, b tels que

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array} \right.$$

donc la famille génératrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est libre donc c'est une base de F

7.

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b+c & -a+d \\ a-d & b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -b+c &=& 2a \\ -a+d &=& 2b \\ a-d &=& 2c \\ b-c &=& 2d \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2a-b+c &=& 0 \\ -a-2b+d &=& 0 \\ a-2c-d &=& 0 \\ b-c-2d &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2a-b+c &=& 0 \\ -3b-c+2d &=& 0 \\ -b-3c-2d &=& 0 \\ b-c-2d &=& 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{«}\textit{Pivot pour } a\text{»} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -2a-b+c &=& 0 & \\ -3b-c+2d &=& 0 & \text{«}\textit{Pivot pour } b\text{»} \\ -8c-8d &=& 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \\ -4c-4d &=& 0 & L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -2a-b+c &=& 0 & \\ -3b-c+2d &=& 0 & \\ -8c-8d &=& 0 & \text{«}\textit{Pivot pour } c\text{»} \\ 0 &=& 0 & L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c=-d \\ b=d \\ a=-d \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -d & d \\ -d & d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ engendre G et ce vecteur étant non nul, il forme une base de G.

correction de l'exercice 2

1. <u>Linéarité de f</u> : Soient deux réels α, β et deux éléments $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f\left[\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \alpha a + \beta c \\ \alpha b + \beta d \end{pmatrix} \quad (a = "\alpha a + \beta c", \quad b = "\alpha b + \beta d") \\ &= \begin{pmatrix} \alpha b + \beta d \\ \alpha a + \beta c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} = \alpha f(X) + \beta f(Y) \end{aligned}$$

<u>Matrice</u> : En choisissant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\forall X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$.

<u>$\ker(f)$</u> :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{2,1} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{2,1} \Rightarrow \ker(f) = \{0_{2,1}\}$$

2. <u>Linéarité de f</u> : Soient deux réels α, β et deux éléments $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f\left[\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \alpha a + \beta d \\ \alpha b + \beta e \\ \alpha c + \beta f \end{pmatrix} \quad (x = \alpha a + \beta d, \quad y = \alpha b + \beta e, \quad z = \alpha c + \beta f) \\ &= \begin{pmatrix} 2(\alpha a + \beta d) - (\alpha b + \beta e) + (\alpha c + \beta f) \\ (\alpha a + \beta d) + (\alpha b + \beta e) + (\alpha c + \beta f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\,(2a - b + c) + \beta\,(2d - e + f) \\ \alpha\,(a + b + c) + \beta\,(d + e + f) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 2a - b + c \\ a + b + c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2d - e + f \\ d + e + f \end{pmatrix} = \alpha f(X) + \beta f(Y) \end{aligned}$$

<u>Matrice</u> : En choisissant $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\forall X \in E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$.

<u>$\ker(f)$</u> :

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{2,1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 & \textit{Pivot pour } x \\ 3y + z = 0 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}z \\ x = -\dfrac{2}{3}z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3}z \\ -\dfrac{1}{3}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(f) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. <u>Linéarité de f</u> : Soient deux réels α, β et deux éléments $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f\left[\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} \alpha a + \beta c \\ \alpha b + \beta d \end{pmatrix} \quad (a = "\alpha a + \beta c", \quad b = "\alpha b + \beta d") \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha a + \beta c) - 2(\alpha b + \beta d) \\ 2(\alpha a + \beta c) + (\alpha b + \beta d) \\ (\alpha a + \beta c) - (\alpha b + \beta d) \\ \alpha b + \beta d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a - 2b \\ 2a + b \\ a - b \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c - 2d \\ 2c + d \\ c - d \\ d \end{pmatrix} = \alpha f(X) + \beta f(Y) \end{aligned}$$

<u>Matrice</u> : En choisissant $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\forall X \in E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$.

<u>$\ker(f)$</u> :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{2,1} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ 2a + b = 0 \\ a - b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow X = 0_{2,1} \Rightarrow \ker(f) = \{0_{2,1}\}$$

4. Linéarité de f : Soient deux réels α,β et deux éléments $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
f(\alpha X+\beta Y) &= f\left[\alpha\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}\right]=f\begin{pmatrix}\alpha a+\beta d\\\alpha b+\beta e\\\alpha c+\beta f\end{pmatrix}\quad (x=\alpha a+\beta d,\quad y=\alpha b+\beta e,\quad z=\alpha c+\beta f)\\
&= \begin{pmatrix}5(\alpha a+\beta d)-6(\alpha c+\beta f)\\3(\alpha a+\beta d)+(\alpha b+\beta e)+3(\alpha c+\beta f)\\3(\alpha a+\beta d)+4(\alpha c+\beta f)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\,(5a-6c)+\beta\,(5d-6f)\\\alpha\,(3a+b+3c)+\beta\,(3d+e+3f)\\\alpha\,(3a+4c)+\beta\,(3d+4f)\end{pmatrix}\\
&= \alpha\begin{pmatrix}5a-6c\\3a+b+3c\\3a+4c\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}5d-6f\\3d+e+3f\\3d+4f\end{pmatrix}=\alpha f(X)+\beta f(Y)
\end{aligned}$$

Matrice : En choisissant $A=\begin{pmatrix}5&0&-6\\3&1&3\\3&0&4\end{pmatrix}$, on a $\forall X\in E=\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad f(X)=AX.$

$\ker(f)$:

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ker(f)\Leftrightarrow f(X)=0_{2,1}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}5x-6z&=&0\\3x+y+3z&=&0\\3x+4z&=&0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}5x-6z&=&0&\textit{Pivot pour } x\\5y+33z&=&0&L_2\leftarrow 5L_2-3L_1\\38z&=&0&L_3\leftarrow 5L_3-3L_1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=0\\y=0\\x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow X=0_{3,1}\Rightarrow\ker(f)=\{0_{3,1}\}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 3

1. Soient α,β deux nombres réels, X,Y deux éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
f(\alpha X+\beta Y) &= A(\alpha X+\beta Y)-(\alpha X+\beta Y)B=\alpha AX+\beta AY-\alpha XB-\beta YB\\
&= \alpha(AX-XB)+\beta(AY-YB)=\alpha f(X)+\beta f(Y)
\end{aligned}$$

donc f est bien une application linéaire.

2. (a)

$$\begin{aligned}
X &\in \ker(f)\Leftrightarrow X\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } f(X)=0_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})}\\
&\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}-1&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-a&-b\\a-c&b-d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-a&a-b\\-c&c-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&-a\\a&b-c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}-a=0\\a=0\\b-c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=c\end{array}\right.\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}0&c\\c&d\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent, tout vecteur X de $\ker(f)$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ donc

$$\ker(f)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Montrons que cette famille génératrice est libre. Soient a,b deux réels tels que

$$a\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&a\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=0\end{array}\right.$$

donc la famille est libre, ce qu'il entraine qu'il s'agit d'une base de $\ker(f)$.

(b)

$$\begin{aligned} X \in \ker(f) &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } f(X) = 0_{\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a-d & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 0 \\ a-d = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = d \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, tout vecteur X de $\ker(f)$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$\ker(f) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Montrons que cette famille génératrice est libre. Soient a, b deux réels tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre, ce qu'il entraine qu'il s'agit d'une base de $\ker(f)$.

(c)

$$\begin{aligned} X \in \ker(f) &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } f(X) = 0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b & 2c \\ 0 & e & 2f \\ 0 & h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -b & -2c \\ d & 0 & -f \\ 2g & h & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -b = 0 & -f = 0 \\ -2c = 0 & 2g = 0 \\ d = 0 & h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 & f = 0 \\ c = 0 & g = 0 \\ d = 0 & h = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, tout vecteur X de $\ker(f)$ est combinaison linéaire de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\ker(f) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Montrons que cette famille génératrice est libre. Soient a, b, c trois réels tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre, ce qu'il entraine qu'il s'agit d'une base de $\ker(f)$.

(d)

$$\begin{aligned}
X \in \ker(f) &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } f(X) = 0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -f \\ g & h & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -c = 0 & g = 0 \\ -f = 0 & h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 & g = 0 \\ -f = 0 & h = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent, tout vecteur X de $\ker(f)$ est combinaison linéaire de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\ker(f) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Montrons que cette famille génératrice est libre. Soient a, b, c, d, e cinq réels tels que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 & d = 0 \\ b = 0 & e = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

donc la famille est libre, ce qu'il entraine qu'il s'agit d'une base de $\ker(f)$.

(e)

$$\begin{aligned}
X \in \ker(f) &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } f(X) = 0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d & -a+e & -b+f \\ g & -d+h & -e+i \\ 0 & -g & -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 & -d+h = 0 \\ -a+e = 0 & -e+i = 0 \\ -b+f = 0 & -g = 0 \\ g = 0 & -h = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = i & e = i \\ b = f & g = 0 \\ d = 0 & h = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} i & f & c \\ 0 & i & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent, tout vecteur X de $\ker(f)$ est combinaison linéaire de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\ker(f) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Montrons que cette famille génératrice est libre. Soient a, b, c trois réels tels que

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}a=0\\b=0\\c=0\end{array}\right.$$

donc la famille est libre, ce qu'il entraine qu'il s'agit d'une base de $\ker(f)$.

(f)

$$\begin{aligned}
X \in \ker(f) &\Leftrightarrow X\in\mathfrak{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et } f(X)=0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})}\\
&\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}d&e&f\\g&h&i\\a&b&c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c&a&b\\f&d&e\\i&g&h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-c+d&-a+e&-b+f\\-f+g&-d+h&-e+i\\a-i&b-g&c-h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}-c+d=0 & -e+i=0\\-a+e=0 & -a+i=0\\-b+f=0 & b-g=0\\-f+g=0 & c-h=0\\-d+h & \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}c=h & f=g\\a=i & d=h\\b=g & e=i\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}i&g&h\\h&i&g\\g&h&i\end{pmatrix}=i\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+g\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent, tout vecteur X de $\ker(f)$ est combinaison linéaire de

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

donc

$$\ker(f)=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Montrons que cette famille génératrice est libre. Soient a, b, c trois réels tels que

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}a=0\\b=0\\c=0\end{array}\right.$$

donc la famille est libre, ce qu'il entraine qu'il s'agit d'une base de $\ker(f)$.