correction de l'exercice 1

1. inversibilité de A : On procède par opérations élémentaires sur les matrices. Remarquont que face à de gros coefficients (comme ici dans la matrice A), pour effectuer les éliminations, il est utile de déterminer le meilleur facteur commun. Par exemple, au lieu de faire $L_2 \leftarrow 16L_2 + 18L_1$dans le calcul suivant, on remarque que $16 = 2 \times 8$ et $18 = 2 \times 9$ (2 est le ppcm) donc on utilise plutôt l'opération $L_2 \leftarrow 8L_2 + 9L_1$

$$\begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -15 & 0 & 8 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 8L_2 + 9L_1 \\ L_3 \leftarrow 8L_3 - 15L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ -23 & -9 & 8 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

Cette dernière matrice est triangulaire dont au moins un des coefficients diagonaux est nul donc la matrice A n'est pas inversible.
inversibilité de $A - I_3$: On remarque que $15 = 3 \times 5$ et $18 = 3 \times 6$, ce qui nous donne

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 15 & 4 & -4 \\ -18 & -5 & 5 \\ 30 & 8 & -8 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 5L_2 + 6L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \right.$$

Cette dernière matrice est triangulaire dont au moins un des coefficients diagonaux est nul donc la matrice $A - I_3$ n'est pas inversible.
inversibilité de $A - 4I_3$: On remarque que $18 = 6 \times 3$ et $12 = 6 \times 2$, $30 = 6 \times 5$ et $12 = 6 \times 2$, ce qui nous donne

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ -18 & -8 & 5 \\ 30 & 8 & -11 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 5L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

Cette dernière matrice est triangulaire dont au moins un des coefficients diagonaux est nul donc la matrice $A - 4I_3$ n'est pas inversible.

2. On procède par espace engendré par une partie (puisque l'on doit montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel et en déterminer une base).

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16a + 4b - 4c \\ -18a - 4b + 5c \\ 30a + 8b - 7c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 16a + 4b - 4c & = 0 \\ -18a - 4b + 5c & = 0 \\ 30a + 8b - 7c & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 16a + 4b - 4c & = 0 \\ 4b + 4c & = 0 \\ 4b + 4c & = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{« } \textit{Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow 8L_2 + 9L_1 \\ L_3 \leftarrow 8L_3 - 15L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 16a + 4b - 4c & = 0 \\ 4b + 4c & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -c \\ a = \dfrac{1}{2}c \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = \frac{c}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow V_0 = \text{Vect} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=e_1}$$

Par conséquent, V_0 est bien un espace vectoriel (c'est l'espace vectoriel engendré par e_1). Le vecteur e_1 est donc générateur de V_0, comme il est non nul, il constitue une base de V_0.

Remarque : *On peut également choisir le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *mais il est préférable de travailler avec un vecteur à coordonnées entières.*

3. Base de V_1

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \in V_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4\\ -18 & -4 & 5\\ 30 & 8 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16a+4b-4c\\ -18a-4b+5c\\ 30a+8b-7c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} 16a+4b-4c & =a\\ -18a-4b+5c & =b\\ 30a+8b-7c & =c\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} 15a+4b-4c & =0\\ -18a-5b+5c & =0\\ 30a+8b-8c & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} 15a+4b-4c & =0\\ -b+c & =0\\ -b+c & =0\end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour a} »}\\ L_2 \leftarrow 5L_2+6L_1\\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} 15a+4b-4c & =0\\ -b+c & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=c\\ a=0\end{array}\right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0\\ c\\ c\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \mathrm{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}}_{=e_2}
\end{aligned}$$

Le vecteur e_2 est donc générateur de V_1, comme il est non nul, il constitue une base de V_1.

Base de V_4

$$\begin{aligned}
X &= \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \in V_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4\\ -18 & -4 & 5\\ 30 & 8 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16a+4b-4c\\ -18a-4b+5c\\ 30a+8b-7c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a\\ 4b\\ 4c\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} 16a+4b-4c & =4a\\ -18a-4b+5c & =4b\\ 30a+8b-7c & =4c\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} 12a+4b-4c & =0\\ -18a-8b+5c & =0\\ 30a+8b-11c & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} 12a+4b-4c & =0\\ -4b-2c & =0\\ -4b-2c & =0\end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow 2L_2+3L_1\\ L_3 \leftarrow 2L_3-5L_1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} 12a+4b-4c & =0\\ -4b-2c & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-\frac{1}{2}c\\ a=\frac{1}{2}c\end{array}\right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c\\ -\frac{1}{2}c\\ c\end{pmatrix} = \frac{c}{2}\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow V_4 = \mathrm{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}}_{=e_3}
\end{aligned}$$

4. Liberté de (e_1, e_2, e_3) : Soient a, b, c trois réels tels que

$$\begin{aligned}
ae_1+be_2+ce_3 &= 0_{\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b=0\\ -2a+b-c=0\\ 2a+b+2c=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b=0\\ 3b-c=0\\ -b+4c=0\end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour a} »}\\ L_2 \leftarrow L_2+2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b=0\\ 3b-c=0\\ 11c=0\end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour b} »}\\ L_3 \leftarrow 3L_3+L_2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c=0\\ b=0\\ a=0\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (e_1, e_2, e_3) est bien libre.

(e_1, e_2, e_3) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: Soit $X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, existe-t-il trois réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned}
X &= ae_1+be_2+ce_3 \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a+b & = & x\\ -2a+b-c & = & y\\ 2a+b+2c & = & z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a+b & = & x\\ 3b-c & = & 2x+y\\ -b+4c & = & -2x+z\end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour a} »}\\ L_2 \leftarrow L_2+2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a+b & = & x\\ 3b-c & = & 2x+y\\ 11c & = & -4x+y+3z\end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour b} »}\\ L_3 \leftarrow 3L_3+L_2\end{array}\right.
\end{aligned}$$

On en déduit l'existence de c puis b et enfin a, ce qui entraine que la famille (e_1, e_2, e_3) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5. D'après l'énoncé, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

   (a) On procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2+2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-L_2\end{array}\right.
\end{aligned}$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice P est inversible et l'on a

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix}-3&-1&1\\-2&0&1\\-4&-1&1\end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \vdots \quad \begin{pmatrix}-3&-1&1\\-2&0&1\\4&1&-1\end{pmatrix} \quad \Big| \; L_3 \leftarrow -L_3$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}-3&-1&1\\-2&0&1\\4&1&-1\end{pmatrix}$. **Vérification** $\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&1&-1\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-1&1\\-2&0&1\\4&1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(b) $A = PTP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = T$ et un calcul direct nous donne

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix}0&0&0\\-2&0&1\\16&4&-4\end{pmatrix}, \quad T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

correction de l'exercice 2

1. Linéarité de f : Soient deux réels α, β et deux éléments $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(\alpha X + \beta Y) &= f\left[\alpha\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix}\alpha a + \beta d\\ \alpha b + \beta e\\ \alpha c + \beta f\end{pmatrix} \quad (x = \alpha a + \beta d, \quad y = \alpha b + \beta e, \quad z = \alpha c + \beta f) \\ &= \begin{pmatrix}3(\alpha a + \beta d) - 2(\alpha b + \beta e) + 3(\alpha c + \beta f)\\ (\alpha a + \beta d) + 2(\alpha c + \beta f)\\ 2(\alpha c + \beta f)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\,(3a - 2b + 3c) + \beta\,(3d - 2e + 3f)\\ \alpha\,(a + 2c) + \beta\,(d + 2f)\\ \alpha\,(2c) + \beta\,(2f)\end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix}3a - 2b + 3c\\ a + 2c\\ 2c\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3d - 2e + 3f\\ d + 2f\\ 2f\end{pmatrix} = \alpha f(X) + \beta f(Y)\end{aligned}$$

Matrice : En choisissant $A = \begin{pmatrix}3&-2&3\\1&0&2\\0&0&2\end{pmatrix}$, on a $\forall X \in E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$.

2. On procède par espace engendré par une partie (puisque l'on doit montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel puis en déterminer une base à la question suivante).

E_1

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow f(X) = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3x - 2y + 3z\\ x + 2z\\ 2z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 3z &= x \\ x + 2z &= y \\ 2z &= z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 3z &= 0 \\ x - y + 2z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 3z &= 0 \\ z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \Big| \; L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix}y\\y\\0\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow E_1 = \text{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{=e_2}\end{aligned}$$

Par conséquent, E_1 est un espace vectoriel (c'est l'espace engendré par e_1)

E_2

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow f(X) = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3x - 2y + 3z\\ x + 2z\\ 2z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 3z &= 2x \\ x + 2z &= 2y \\ 2z &= 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z &= 0 \\ x - 2y + 2z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z &= 0 \\ -z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \Big| \; L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix}2y\\y\\0\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow E_2 = \text{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}_{=e_2}\end{aligned}$$

Par conséquent, E_2 est un espace vectoriel (c'est l'espace engendré par e_2).

3. D'après la question 2, on en déduit que e_1 (resp. e_2) est un vecteur générateur de E_1 (resp. E_2) et comme il est non nul, il constitue une base de E_1 (resp. E_2).

4. Si l'on pose $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned}
f(e_3) &= 2e_3 + e_2 \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x-2y+3z \\ x+2z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 2y+1 \\ 2z \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x-2y+3z &=& 2x+2 \\ x+2z &=& 2y+1 \\ 2z &=& 2z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z &=& 2 \\ x-2y+2z &=& 1 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-2y+3z &=& 2 \\ -z &=& -1 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \quad \Big| \; L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} z = 1 \\ x = 2y-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow e_3 = \begin{pmatrix} 2y-1 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

On constate que l'on dispose d'une infinité de valeurs pour e_3. Comme on demande un seul vecteur, on choisit donc n'importe quelle valeur pour y, par exemple $y = 0$ (du moment que le vecteur e_3 ne soit pas nul, car un vecteur nul ne peut appartenir à une base). Par conséquent, le vecteur $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

5. <u>Liberté de (e_3, e_2, e_1)</u> : Soient a, b, c trois réels tels que

$$\begin{aligned}
ae_3 + be_2 + ce_1 &= 0_{\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -a+2b+c=0 \\ b+c=0 \\ a=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=0 \\ 2b+c=0 \\ b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=0 \\ 2b+c=0 \\ c=0 \end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=0 \\ c=0 \\ b=0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (e_3, e_2, e_1) est bien libre.

<u>(e_3, e_2, e_1) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$</u> : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, existe-t-il trois réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned}
X &= ae_3 + be_2 + ce_1 \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -a+2b+c &=& x \\ b+c &=& y \\ a &=& z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& z \\ 2b+c &=& x+z \\ b+c &=& y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& z \\ 2b+c &=& x+z \\ c &=& -x+2y-z \end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On en déduit l'existence de a puis c et enfin b, ce qui entraine que la famille (e_3, e_2, e_1) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

6. D'après l'énoncé, on a $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) On procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \; L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Big| \; L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2
\end{aligned}$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice P est inversible et l'on a

$$\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}2&-2&1\\1&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1+L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2+L_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}0&0&-1\\1&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix} \left| \; L_1 \leftarrow L_1-2L_2 \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\-1&2&-1\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array} \right.$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\-1&2&-1\end{pmatrix}$. **Vérification** $\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&1\\-1&2&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(b) $A = PTP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = T$ et un calcul direct nous donne

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix}0&0&2\\2&-2&3\\-1&2&-1\end{pmatrix}, \quad T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

correction de l'exercice 3

1. On procède par espace engendré par une partie (puisque l'on doit montrer qu'il s'agit d'un espace vectoriel et en déterminer une base).

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in V \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2&-1&2\\-15&-6&11\\-14&-6&11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2a-b+2c\\-15a-6b+11c\\-14a-6b+11c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -2a-b+2c &= a \\ -15a-6b+11c &= b \\ -14a-6b+11c &= c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -3a-b+2c &= 0 \\ -15a-7b+11c &= 0 \\ -14a-6b+10c &= 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -3a-b+2c &= 0 \\ -2b+c &= 0 \\ -4b+2c &= 0 \end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2-5L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3-14L_1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -3a-b+2c &= 0 \\ -2b+c &= 0 \\ 0 &= 0 \end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \frac{1}{2}c \\ a = \frac{1}{2}c \end{array}\right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}c\\ \frac{1}{2}c\\ c\end{pmatrix} = \frac{1}{2}c\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow V = \mathrm{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}_{=e_1} \end{aligned}$$

Le vecteur e_1 est donc générateur de V, comme il est non nul, il constitue une base de V.

2. Si l'on pose $e_2 = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} f(e_2) &= e_2+e_1 \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2a-b+2c\\-15a-6b+11c\\-14a-6b+11c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+1\\b+1\\c+2\end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -2a-b+2c &=& a+1 \\ -15a-6b+11c &=& b+1 \\ -14a-6b+11c &=& c+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -3a-b+2c &=& 1 \\ -15a-7b+11c &=& 1 \\ -14a-6b+10c &=& 2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -3a-b+2c &=& 1 \\ -2b+c &=& -4 \\ -4b+2c &=& -8 \end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2-5L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3-14L_1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -3a-b+2c &=& 1 \\ -2b+c &=& -4 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \frac{1}{2}c+2 \\ a = \frac{1}{2}c-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}c-1\\ \frac{1}{2}c+2\\ c\end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On constate que l'on dispose d'une infinité de valeurs pour e_2. Comme on demande un seul vecteur, on choisit donc n'importe quelle valeur pour c, par exemple $c = 0$ (du moment que le vecteur e_2 ne soit pas nul, car un vecteur nul ne peut appartenir à une base). Par conséquent, le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ convient.

3. Si l'on pose $e_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned}
f(e_3) &= e_3 + e_2 \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a-b+2c \\ -15a-6b+11c \\ -14a-6b+11c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ b+2 \\ c \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2a-b+2c &=& a-1 \\ -15a-6b+11c &=& b+2 \\ -14a-6b+11c &=& c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3a-b+2c &=& -1 \\ -15a-7b+11c &=& 2 \\ -14a-6b+10c &=& 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3a-b+2c &=& -1 \\ -2b+c &=& 7 \\ -4b+2c &=& 14 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour a} »} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 14L_1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3a-b+2c &=& -1 \\ -2b+c &=& 7 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour b} »} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \frac{1}{2}c - \frac{7}{2} \\ a = \frac{1}{2}c + \frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}c - \frac{7}{2} \\ c \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

On constate que l'on dispose d'une infinité de valeurs pour e_3. Comme on demande un seul vecteur, on choisit donc n'importe quelle valeur pour c, par exemple $c = 1$ (afin que le vecteur e_3 soit à coefficients entiers et non fractionnaire).

Par conséquent, le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

4. Liberté de (e_1, e_2, e_3) : Soient a, b, c trois réels tels que

$$\begin{aligned}
ae_1 + be_2 + ce_3 &= 0_{\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a-b+2c=0 \\ a+2b-3c=0 \\ 2a+c=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a-b+2c=0 \\ 3b-5c=0 \\ 2b-3c=0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour a} »} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a-b+2c=0 \\ 3b-5c=0 \\ c=0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour b} »} \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (e_1, e_2, e_3) est bien libre.

(e_1, e_2, e_3) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, existe-t-il trois réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned}
X &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c &=& x \\ a+2b-3c &=& y \\ 2a+c &=& z \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c &=& x \\ 3b-5c &=& -x+y \\ 2b-3c &=& -2x+z \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour a} »} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a-b+2c &=& x \\ 3b-5c &=& -x+y \\ c &=& -4x-2y+3z \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \text{« \textit{Pivot pour b} »} \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On en déduit l'existence de c puis b et enfin a, ce qui entraine que la famille (e_1, e_2, e_3) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5. D'après l'énoncé, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) On procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left|\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \left|\begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice P est inversible et l'on a

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}9 & 4 & -6\\ -21 & -9 & 15\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}6 & 3 & -3\\ -21 & -9 & 15\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix} \left| \; L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -7 & -3 & 5\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \end{array}\right.$$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -7 & -3 & 5\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix}$. **Vérification** $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -7 & -3 & 5\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(b) $A = PTP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}AP = T$ et un calcul direct nous donne

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix}-5 & -2 & 4\\ -11 & -5 & 8\\ -4 & -2 & 3\end{pmatrix}, \quad T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$