correction de l'exercice 1

1. Le joueur peut avoir entre 0 et p numéros gagnants lors de la première phase donc $X(\Omega) = [\![0, p]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0, p]\!], \quad P(X = k) = \frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}}$$

Justification des calculs de probabilité : *On dispose ici d'une population de taille n (les numéros) ainsi que d'une sous-population de taille p (les numéros gagnants). On pioche p éléments de la population glabale et X désigne le nombre d'éléments de la sous-population donc X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(p, n, p)$*
On peut aussi le justifier ainsi : pour les cas favorables, on choisit k numéros parmi les p numéros gagnants ($\binom{p}{k}$ choix) et les autres $p-k$ numéros sont choisit parmi les $n-p$ numéros non gagnants ($\binom{n-p}{p-k}$ choix), pour les cas possibles, on choisit p numéros parmi les n disponibles ($\binom{n}{p}$ choix) donc $P(X = k) = \dfrac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}}$.

Puisque X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(p, n, p)$, il est immédiat que $E(X) = p \times \dfrac{p}{n} = \dfrac{p^2}{n}$.
Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} P(X = k) &= 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{n}{p} \\
E(X) &= \frac{p^2}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} kP(X = k) = \frac{p^2}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} k\frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}} = \frac{p^2}{n} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p} k\binom{p}{k}\binom{n}{p-k} = \frac{p^2}{n}\binom{n}{p}
\end{aligned}$$

2. (a) La probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Z_i = 1)$ signifie que l'évènement $(X = k)$ est réalisé et que l'on souhaite la réalisation de l'évènement $(Z_i = 1)$, c'est-à-dire que lors de la première phase du jeu, on a pioché k numéros gagnants et que l'on souhaite, lors de la seconde phase du jeu, que le i-ième numéro tiré soit un numéro gagnant. Autrement dit, au début de la seconde phase de jeu, on dispose de $n - 2p$ numéros dont $p - k$ sont gagnants (puisque le joueur a enlevé p numéros dont k numéros gagnants et le meneur a retiré p numéros tous perdants) et l'on souhaite que le i-ième numéro tiré parmi ces $n - 2p$ numéros soit gagnant. La probabilité que le i-ième numéro pioché soit gagnant est donc $\dfrac{p-k}{n-2p}$,ce qui implique que $P_{(X=k)}(Z_i = 1) = \dfrac{p-k}{n-2p}$.
Remarque : on pioche simultanément les numéros, chaque numéro a cette probabilité d'être gagnant mais la probabilité d'avoir q numéros gagnants n'est pas $\left(\dfrac{p-k}{n-2p}\right)^q$ car les tirages ne sont pas indépendants.

(b) L'évènement $(Z_i = 1)$ signifie que le i-ième numéro pioché soit gagnant, cela dépend évidemement du nombre de numéros gagnants dans la première phase du jeu, ce qui est décrit mathématiquement par les évènements $(X = k)_{k \in [\![0,p]\!]}$. La formule des probabilités totales appliquée à ce système complet d'évènements nous donne

$$\begin{aligned}
P(Z_i = 1) &= \sum_{k=0}^{p} P(X = k \cap Z_i = 1) = \sum_{k=0}^{p} P(X = k)P_{(X=k)}(Z_i = 1) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}}{\binom{n}{p}} \frac{p-k}{n-2p} \\
&= \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} (p-k)\binom{p}{k}\binom{n}{p-k}
\end{aligned}$$

(c) Il est immédiat que $Z = \sum_{i=1}^{p} Z_i$ (revoir pour cela le cours sur les variables de Bernouilli) donc $E(Z) = \sum_{i=1}^{p} E(Z_i)$.
Ensuite, l'espérance d'une variable de Bernouilli Z_i est égale à la probabilité $P(Z_i = 1)$. D'après les relations (1) et (2) obtenues à la question 1 et en scindant en deux la somme définissant $P(Z_i = 1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
P(Z_i &= 1) = \frac{p}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n}{p-k} - \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} k\binom{p}{k}\binom{n}{p-k} \\
&= \frac{p}{(n-2p)\binom{n}{p}}\binom{n}{p} - \frac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \frac{p^2}{n}\binom{n}{p} = \frac{np - p^2}{(n-2p)n}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{p} E(Z_i) = \sum_{i=1}^{p} \frac{np - p^2}{(n-2p)n} = \frac{np - p^2}{(n-2p)n} \times p = \frac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}$$

3. On remarque immédiatement que $E(Z) = \dfrac{n-p}{n-2p}E(X)$ et, comme $\dfrac{n-p}{n-2p} \geqslant 1$ et $E(X) \geqslant 0$, on en déduit que $E(Z) \geqslant E(X)$ donc la stratégies B est préférable au joueur (en moyenne !!).

correction de l'exercice 2
Partie I.

1. (a) Pour commencer, on a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, un calcul direct nous donne $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Le plus simple est de montrer que $E = \text{Vect}(I, J, J^2)$ car cela justifie que E est un espace vectoriel et cela répond partiellement à la question 1.c). On constate que

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = xI + yJ + zJ^2$$

   donc $E = \text{Vect}(I, J, J^2)$.

   (c) D'après la question précédente, la famille (I, J, J^2) est une famille génératrice de E. Il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soit a, b, c trois réels tels que

$$\begin{aligned} aI + bJ + cJ^2 &= 0_{\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Par conséquent, la famille (I, J, J^2) est une base de E.

2. (a) On procède par les opérations élémentaires sur les matrices

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

   La nouvelle matrice est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc la matrice P est inversible et l'on a

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

   donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. **Vérification** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Un calcul direct nous donne

$$P^{-1}M(x,y,y)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y & \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y & \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y & -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y\\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y & -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y\end{pmatrix}\quad P^{-1}M(x,y,z)P=\begin{pmatrix}x+2y & 0 & 0\\ 0 & x-y & 0\\ 0 & 0 & x-y\end{pmatrix}$$

(b) En utilisant la fameuse formule $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$, l'égalité de la question 2.a) nous donne

$$P^{-1}[M(x,y,y)]^nP=\begin{pmatrix}(x+2y)^n & 0 & 0\\ 0 & (x-y)^n & 0\\ 0 & 0 & (x-y)^n\end{pmatrix}\Leftrightarrow [M(x,y,y)]^n = P\begin{pmatrix}(x+2y)^n & 0 & 0\\ 0 & (x-y)^n & 0\\ 0 & 0 & (x-y)^n\end{pmatrix}P^{-1}$$

Puis, par un calcul direct, on a

$$P\begin{pmatrix}(x+2y)^n & 0 & 0\\ 0 & (x-y)^n & 0\\ 0 & 0 & (x-y)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(x+2y)^n & (x-y)^n & (x-y)^n\\ (x+2y)^n & -(x-y)^n & 0\\ (x+2y)^n & 0 & -(x-y)^n\end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned}[M(x,y,y)]^n &= \begin{pmatrix}\frac{2}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n\\ -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & \frac{2}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n\\ -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & -\frac{1}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n & \frac{2}{3}(x-y)^n+\frac{1}{3}(x+2y)^n\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}(x+2y)^n\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}(x-y)^n\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}(x+2y)^nM(1,1,1)+\frac{1}{3}(x-y)^nM(2,-1,-1)\end{aligned}$$

Partie II.

1. (a) On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements A_n, B_n, C_n et en utilisant la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}P(A_{n+1}) &= P(A_n\cap A_{n+1})+P(B_n\cap A_{n+1})+P(C_n\cap A_{n+1})\\ &= P(A_n)P_{(A_n)}(A_{n+1})+P(B_n)P_{(B_n)}(A_{n+1})+P(C_n)P_{(C_n)}(A_{n+1})\\ &= (1-2p)P(A_n)+pP(B_n)+pP(C_n)\\ P(B_{n+1}) &= P(A_n\cap B_{n+1})+P(B_n\cap B_{n+1})+P(C_n\cap B_{n+1})\\ &= P(A_n)P_{(A_n)}(B_{n+1})+P(B_n)P_{(B_n)}(B_{n+1})+P(C_n)P_{(C_n)}(B_{n+1})\\ &= pP(A_n)+(1-2p)P(B_n)+pP(C_n)\\ P(C_{n+1}) &= P(A_n\cap C_{n+1})+P(B_n\cap C_{n+1})+P(C_n\cap C_{n+1})\\ &= P(A_n)P_{(A_n)}(C_{n+1})+P(B_n)P_{(B_n)}(C_{n+1})+P(C_n)P_{(C_n)}(C_{n+1})\\ &= pP(A_n)+pP(B_n)+(1-2p)P(C_n)\end{aligned}$$

ce qui implique les égalités suivantes $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}a_{n+1}=(1-2p)a_n+pb_n+pc_n\\ b_{n+1}=pa_n+(1-2p)b_n+pc_n\\ c_{n+1}=pa_n+pb_n+(1-2p)c_n\end{cases}$

(b) Il est immédiat que $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\\ c_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2p & p & p\\ p & 1-2p & p\\ p & p & 1-2p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}=M(1-2p,p,p)\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}$

(c) Il est immédiat que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}=[M(1-2p,p,p)]^n\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\\ c_0\end{pmatrix}$$

Comme le point S est situé initialement en A et d'après **II.2.b.**, on a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= \left[\frac{1}{3}((1-2p)+2p)^n M(1,1,1) + \frac{1}{3}((1-2p)-p)^n M(2,-1,-1)\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\frac{1}{3}M(1,1,1) + \frac{1}{3}(1-3p)^n M(2,-1,-1)\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(1-3p)^n \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui entraine les égalités suivantes $\begin{cases} a_n = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^n \\ b_n = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \\ c_n = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3p)^n \end{cases}$

2. La variable aléatoire $X_1+X_2+\cdots+X_n$ représente le nombre de fois où S passe par le A et son espérance m_n vaut

$$m_n = E(X_1+X_2+\cdots+X_n) = E(X_1)+\cdots+E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

Par construction, on a

$$E(X_k) = 0\times P(X_k=0) + 1\times P(X_k=1) = P(X_k=1) = P(A_k) = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^k$$

on a donc

$$\begin{aligned}
m_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1-3p)^k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}(1-3p)^k \underset{j=k-1}{=} \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}\sum_{j=0}^{n-1}(1-3p)^{j+1} \\
&= \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}(1-3p)\sum_{j=0}^{n-1}(1-3p)^j = \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{1-(1-3p)} \\
&= \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p} = \frac{1}{3}\left[n + 2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}\right].
\end{aligned}$$

Lorsque $n\to+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}\right] = 2(1-3p)\frac{1}{3p}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc

$$m_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}n$$

correction de l'exercice 3

1. Loi de X_1 : on effectue 1 lancer donc on ne peut avoir de changement de côté, ce qui implique que $X_1(\Omega)=\{0\}$ et $P(X_1=0)=1$.
Loi de X_2 : on effectue 2 lancers donc $X_2(\Omega)=\{0,1\}$ et

$$P(X_2=0) = P(PP)+P(FF) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad P(X_2=1) = P(FP)+P(PF) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

puis $E(X_2) = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Loi de X_3 : on effectue 3 lancers donc $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P(PPP) + P(FFF) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \\ P(X_3 = 1) &= P(PFF) + P(FPP) + P(PPF) + P(FFP) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \\ P(X_3 = 2) &= P(FPF) + P(PFP) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Loi de X_4 : on effectue 4 lancers donc $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_4 = 0) &= P(PPPP) + P(FFFF) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8} \\ P(X_4 = 1) &= P(PFFF) + P(PPFF) + P(PPPF) + P(FPPP) + P(FFPP) + P(FFFP) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \\ P(X_4 = 2) &= P(PFPP) + P(PPFP) + P(FPFF) + P(FFPF) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} \\ P(X_4 = 3) &= P(PFPF) + P(FPFP) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2. Pour commencer, on constate que si l'on effectue 3 lancers, le plus grand nombre de changements est donné par PFP ou FPF. Plus généralement, pour obtenir k changements, il est indispensable d'effectuer $k+1$ lancers (1 changement nécessite deux lancers, 2 changements nécessitent 3 lancers, etc. !!). Par conséquent, si l'on effectue N lancers et que l'on souhaite k changements, on a nécessairement $k + 1 \leqslant N \Leftrightarrow k \leqslant N - 1$. Ensuite, si $k \leqslant N - 1$, on dispose de k changements en considérant les lancers

P	F	P	F	..	P	F	F	F	...	F
1	2	3	4	..	k	k+1	F	F	..	F

ou

P	F	P	F	..	F	P	P	P	...	P
1	2	3	4	..	k	k+1	P	P	..	P

selon la parité de k donc $X_N(\Omega) = \{0, ..., N-1\}$.

3. L'évènement $(X_N = 0)$ signifie qu'il n'y a aucun changement en N lancers, ce qui implique que l'on obtient que des piles ou que des faces donc

$$P(X_N = 0) = P(\underbrace{PP..P}_{N \text{ fois}}) + P(\underbrace{FF...F}_{N \text{ fois}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^N + \left(\frac{1}{2}\right)^N = 2\left(\frac{1}{2}\right)^N = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

L'évènement $(X_N = 1)$ signifie qu'il y a un changement, ce qui implique que l'on obtient soit une succession de " Pile " puis une succession de " Face ", soit une succession de " Face " puis une succession de " Pile " donc

$$\begin{aligned} P(X_N = 1) &= P(PF..F) + P(PPF..F) + \cdots + P(P..PF) + P(FP..P) + P(FFP..P) + \cdots + P(F..FP) \\ P(X_N = 1) &= \sum_{k=1}^{N-1} P(\underbrace{P...P}_{k \text{ fois}}\underbrace{F...F}_{N-k \text{ fois}}) + \sum_{k=1}^{N-1} P(\underbrace{F...F}_{k \text{ fois}}\underbrace{P...P}_{N-k \text{ fois}}) = \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^N + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^N \\ &= 2\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^N = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N \end{aligned}$$

4. (a) La probabilité conditionnelle signifie que l'évènement $(X_N = k)$ est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement $(X_{N+1} = k)$, c'est-à-dire qu'au cours des N lancers, il y a k changements et on veut qu'au cours des $N + 1$ lancers, il y ait encore k changements, autrement dit, il faut que le N-ième lancer et le $(N + 1)$-ième lancer donne le même résultat (pour ne pas ramener un changement supplémentaire). Etant donné que le N-ième lancer est déjà réalisé, la probabilité que le $(N+1)$-ième lancer donne le même résultat est égale à $\frac{1}{2}$ (par exemple, si le N-ième lancer donne un Pile, le suivant donne encore un Pile) donc $P_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}$.

   (b) En utilisant la question précédente, on a

$$\begin{aligned} P(X_{N+1} - X_N = 0 \cap X_N = k) &= P([X_{N+1} = X_N] \cap X_N = k) = P(X_{N+1} = k \cap X_N = k) \\ &= P(X_N = k)P_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_N = k). \end{aligned}$$

(c) La famille $(X_N = k)_{k\in[\![0,N-1]\!]}$ forment un système complet d'évènements donc

$$P(X_{N+1}-X_N=0)=\sum_{k=0}^{N-1}P\left(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k\right)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2}P(X_N=k).=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2}P(X_N=k)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

(d) La variable X_N représente le nombre de changements en N lancers et la variable X_{N+1} représente le nombre de changements en $N+1$ lancers. Etant donné qu'il ne peut y avoir que zéro ou un changement entre le N-ième lancer et le $(N+1)$-ième lancers, on en déduit que la variable $X_{N+1}-X_N$, qui représente en fait le nombre de changements entre le N-ième lancer et le $(N+1)$-ième lancer, prend seulement les valeurs 0 et 1, c'est-à-dire que $(X_{N+1}-X_N)(\Omega)=\{0,1\}$.
D'autre part, la question précédente montre que $P(X_{N+1}-X_N=0)=\dfrac{1}{2}$ donc
$P(X_{N+1}-X_N=1)=1-P(X_{N+1}-X_N=0)=\dfrac{1}{2}$, ce qui montre que la variable $X_{N+1}-X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. Son espérance est donc égale à $\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire que

$$E(X_{N+1}-X_N)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow E(X_{N+1})-E(X_N)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow E(X_{N+1})=E(X_N)+\frac{1}{2}$$

La suite $(E(X_N)_{N\geqslant 1}$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et $E(X_2)=\dfrac{1}{2}$ (question 2), ce qui nous permet d'écrire

$$E(X_N)=\frac{1}{2}(N-2)+E(X_2)=\frac{N-2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{N-1}{2}$$

5. (a) Il s'agit de montrer les égalités suivantes $P\left(X_{N+1}-X_N=i\cap X_N=k\right)=P(X_{N+1}-X_N=i)P(X_N=k)$ pour $i\in[\![0,1]\!]$ et $k\in[\![0,N-1]\!]$. La question 4.c) montre que $P\left(X_{N+1}-X_N=0\right)=\dfrac{1}{2}$ et la question 4.b) montre que

$$P\left(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k\right)=\frac{1}{2}P(X_N=k)\Rightarrow P\left(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k\right)=P(X_{N+1}-X_N=0)P(X_N=k)$$

D'autre part, en refaisant le raisonnement de la question, on obtient $P_{(X_N=k)}\left(X_{N+1}-X_N=1\right)=\dfrac{1}{2}$ (il faut que le résultat du $(N+1)$-ième lancer soit différent du résultat du N-ième lancer, par exemple si le N-ième lancer donne Pile, il faut que le $(N+1)$-ième lancer donne Face) donc

$$P\left(X_{N+1}-X_N=1\cap X_N=k\right)=P_{(X_N=k)}\left(X_{N+1}-X_N=1\right)P(X_N=k)=\frac{1}{2}P(X_N=k)$$

et la question 4.d nous donne $P\left(X_{N+1}-X_N=1\right)=\dfrac{1}{2}$, ce qui implique l'égalité suivante

$$P\left(X_{N+1}-X_N=1\cap X_N=k\right)=P(X_{N+1}-X_N=1)P(X_N=k)$$

ce qui montre que les variables $X_{N+1}-X_N$ et X_N sont indépendantes.

(b) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_N)$: X_N suit une loi binômiale $B(N-1,\dfrac{1}{2})$.
Initialisation $N=2$: X_2 suit une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ (cf. question 2) donc elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1,\dfrac{1}{2})=\mathcal{B}(2-1,\dfrac{1}{2})$, ce qui démontre $(\mathcal{P}_2)$.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_N)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{N+1})$, c'est-à-dire supposons que la variable X_N suit la loi de binomiale $\mathcal{B}(N-1,\dfrac{1}{2})$ et montrons que la variable X_{N+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N,\dfrac{1}{2})$.

- La question 4.d) montre que $X_{N+1}-X_N$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, autrement dit elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1,\dfrac{1}{2})$.
- La variable X_N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N-1,\dfrac{1}{2})$
- Les variables $X_{N+1}-X_N$ et X_N sont indépendantes

Par conséquent, on peut affirmet que la variable $(X_{N+1}-X_N)+X_N=X_{N+1}$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}((N-1)+1,\dfrac{1}{2})=\mathcal{B}(N,\dfrac{1}{2})$ (cf. le cours sur l'addition de variables binomiales indépendantes) ce qui achève la récurrence.

correction de l'exercice 4

1. On répète indéfiniment l'expérience $\mathcal{E}$ " piocher une boule dans l'urne ", les expériences étant mutuellement indépendantes et X représente le rang de réalisation de l'évènement A " obtenir une boule blanche " dont la probabilité est égale à p donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, c'est-à-dire

$$X_1(\Omega) = \mathbb{N}^\times, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times \quad P(X_1 = n) = (1-p)^{n-1}p$$

En particulier, X admet une espérance et une variance et on a

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}p = p\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \\
E(X_1(X_1-1)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-1}p = p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} = p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p^2} \\
E(X_1^2) &= E(X_1(X_1-1)) + E(X_1) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} = \frac{2-p}{p^2} \\
V(X_1) &= E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}
\end{aligned}$$

2. Loi de X_2 : Etant donné que l'on ne peut obtenir la 2-ième boule blanche qu'à compter de la seconde pioche, il est immédiat que $X_2(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Le rang d'apparition de la seconde boule blanche dépendant du rang d'apparition de la première boule blanche, c'est-à-dire des évènements $\{(X_1 = 1), (X_1 = 2), ..\} = \{(X_1 = i)\}_{i\in\mathbb{N}^\times}$. En utilisant le système complet d'évènements $\{(X_1 = i)\}_{i\in\mathbb{N}^\times}$, on a

$$\begin{aligned}
\forall j &\in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad P(X_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1 = i \cap X_2 = j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(X_1 = i \cap X_2 = j) + \sum_{i=j}^{+\infty} \underbrace{P(X_1 = i \cap X_2 = j)}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} (1-p)^{j-2}p^2 = (1-p)^{j-2}p^2 \sum_{i=1}^{j-1} 1 = (j-1)(1-p)^{j-2}p^2
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités : *Etant donné que la seconde boule blanche apparait nécessairement après la première boule blanche (!!), l'évènement $(X_1 = i \cap X_2 = j)$ est impossible lorsque $i \geqslant j$. Lorsque $i < j \Leftrightarrow i \leqslant j-1$, l'évènement $(X_1 = i \cap X_2 = j)$ est identique à l'évènement $\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}} \cap B_i \cap \overline{B_{i+1}} \cap \cdots \overline{B_{j-1}} \cap B_j$, où B_k désigne l'évènement " obtenir une boule blanche à la k-ième pioche ". Etant donné que ces évènements sont mutuellements indépendants, que deux de ces évènements ont pour probabilité p et les $j-2$ autres ont la probabilité $(1-p)$, on en déduit que*

$$\begin{aligned}
P(X_1 &= i \cap X_2 = j) = P(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{i-1}} \cap B_i \cap \overline{B_{i+1}} \cap \cdots \overline{B_{j-1}} \cap B_j) \\
&= P(\overline{B_1}) \cdots P(\overline{B_{i-1}})P(B_i)P(\overline{B_{i+1}}) \cdots P(\overline{B_{j-1}})P(B_j) = (1-p)^{j-2}p^2
\end{aligned}$$

Espérance de X_2 : La variable X_2 admet une espérance ssi la série

$$\sum_{n\geqslant 2} jP(X_2 = j) = \sum_{j\geqslant 2} j(j-1)(1-p)^{j-2}p^2 = p^2\sum_{j\geqslant 2} j(j-1)(1-p)^{j-2}$$

converge, ce qui est le cas car $1-p \in]0,1[$ donc à $]-1,1[$ et l'on a

$$E(X_2) = \sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1)(1-p)^{j-2}p^2 = p^2\sum_{j=2}^{+\infty} j(j-1)(1-p)^{j-2} = p^2\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p}$$

3. (a) La variable Y_r représente le nombre de pioches nécessaires entre l'obtention de la r-ième boule blanche et la $(r+1)$-ième boule blanche. Si l'on considère comme lancement " 0 ", le lancer qui a fourni la r-ième boule blanche, la variable Y_r représente le nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une boule blanche donc Y_r suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, ce qui implique les identités suivantes

$$Y_r(\Omega) = \mathbb{N}^\times, \quad \forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad P(Y_r = k) = (1-p)^{k-1}p, \quad E(Y_r) = \frac{1}{p}$$

   (b) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n)$: " X_r admet une espérance ".
   Initialisation $r = 1$: $(\mathcal{P}_1)$ est vraie d'après la question 1.
   Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_r)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{r+1})$, c'est-à-dire supposons que X_r admet une espérance et montrons que X_{r+1} admet une espérance. D'après la question 3.a) la variable $Y_r = X_{r+1} - X_r$ admet une espérance et, puisque l'hypothèse $(\mathcal{P}_r)$ est supposée vraie, la variable X_r admet une espérance donc la variable $X_r = (X_{r+1} - X_r) + X_r$ admet une espérance, ce qui démontre $(\mathcal{P}_{r+1})$ et achève la récurrence.

(c) D'après la question 3.a), on a

$$E(Y_r) = \frac{1}{p} \Leftrightarrow E(X_{r+1} - X_r) = \frac{1}{p} \Leftrightarrow E(X_{r+1}) - E(X_r) = \frac{1}{p} \Leftrightarrow E(X_{r+1}) = E(X_r) + \frac{1}{p}$$

ce qui montre que la suite $(E(X_r))_{r\in\mathbb{N}^\times}$ est arithmétique de raison $\frac{1}{p}$ donc

$$\forall r \in \mathbb{N}^\times, \quad E(X_r) = (r-1) \times \frac{1}{p} + E(X_1) = (r-1) \times \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{r}{p}$$

4. (a) Pour obtenir la r-ième boule blanche, il est indispensable d'effectuer au moins r pioches. Il est dès lors évident que

$$X_r(\Omega) = \{r, r+1, r+2, ...\} = \{k, \quad k \in \mathbb{N} \text{ et } k \geqslant r\}$$

Il est immédiat que $(X_r = k) = A_k \cap B_k$ lorsque $r \leqslant k$ où
A_k : "obtenir $r-1$ boules blanches aux $k-1$ premiers pioches ",
B_k "obtenir une boule blanche à la k-ième pioche ".
donc

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ et } k \geqslant r, \quad P(X_r = k) = P(A_k \cap B_k) = P(A_k)P_{A_k}(B_k) = \left[\binom{r-1}{k-1} p^{r-1}(1-p)^{k-r}\right][p] = \binom{r-1}{k-1} p^r(1-p)^{k-r}$$

Justification de calcul de probabilités :
$P(A_k)$: On souhaite obtenir $r-1$ boules blanches en $k-1$ pioches (donc on obtient $(k-1)-(r-1) = k-r$ boules non blanches). Les pioches s'effectuant dans des conditions absolument identiques et indépendantes, on se trouve dans le cadre du schéma binômial, ce qui nous donne $P(A_k) = \binom{r-1}{k-1} p^{r-1}(1-p)^{k-r}$
$P_{A_k}(B_k)$: L'évènement A_k est réalisé et on souhaite la réalisation de l'évènement B_k. Autrement dit, on a effectué $k-1$ pioches dont $r-1$ ont fourni des boules blanches et on souhaite que la k-ième pioche fournit une boule blanche. Les pioches étant mutuellement indépendantes, cela revient à calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche en une pioche donc $P_{A_k}(B_k) = p$.

(b) En combinant la loi de X_r obtenue dans cette question avec la question 4.a) et en utilisant l'égalité classique $\binom{r}{k} = \frac{k}{r}\binom{r-1}{k-1}$, on en déduit que la série

$$\sum_{k\geqslant r} kP(X_r = k) = \sum_{k\geqslant r} k\binom{r-1}{k-1} p^r(1-p)^{k-r}$$

converge, donc pour tout $p \in]0,1[$ sa somme vaut

$$\begin{aligned} E(X_r) &= \frac{r}{p} \Leftrightarrow \sum_{k=r}^{+\infty} k\binom{r-1}{k-1} p^r(1-p)^{k-r} = \frac{r}{p} \Leftrightarrow \left(\frac{p}{1-p}\right)^r \sum_{k=r}^{+\infty} k\binom{r-1}{k-1}(1-p)^k = \frac{r}{p} \\ &\Leftrightarrow r\left(\frac{p}{1-p}\right)^r \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{r}{k}(1-p)^k = \frac{r}{p} \Leftrightarrow \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{r}{k}(1-p)^k = \frac{(1-p)^r}{p^{r+1}} \end{aligned}$$

Remarque : *En utilisant l'égalité classique $\binom{r}{k} = \frac{k}{r}\binom{r-1}{k-1}$ et en effectuant le changement de variable $x = 1-p$, on a montré que la série la série $\sum_{k\geqslant r} \binom{r}{k} x^k$ est convergente pour tout $x \in]0,1[$ et*

$$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{r}{k} x^k = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

ce qui est une égalité classique souvent admise ou redemontrée dans d'assez nombreux sujets de concours.