correction de l'exercice 1

1. (a) On commence par expliciter $A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda+2 & 1 & 1\\ 0 & -\lambda+3 & 4\\ 0 & 2 & -\lambda+1\end{pmatrix}$, par utilisation du pivot de Gauss, on aboutit à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix}-\lambda+2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -\lambda+1\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2+2\lambda+\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ donc λ est solution soit de $-\lambda+2=0$ soit de $-\frac{1}{2}\lambda^2+2\lambda+\frac{5}{2}=0$.
   Par conséquent, $\lambda\in\{-1,2,5\}$

   (b) On commence par expliciter $A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda+1 & 2 & 0\\ 2 & -\lambda+1 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}$, par utilisation du pivot de Gauss, on aboutit à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix}2 & -\lambda+1 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda^3+\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda\end{pmatrix}$ donc λ est solution de $-\frac{1}{2}\lambda^3+\lambda^2+\frac{3}{2}\lambda=0$.
   Par conséquent, $\lambda\in\{-1,0,3\}$

   (c) On commence par expliciter $A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda+1 & 0 & 1\\ 0 & -\lambda+2 & 0\\ 1 & 0 & -\lambda+1\end{pmatrix}$, par utilisation du pivot de Gauss, on aboutit à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix}1 & 0 & -\lambda+1\\ 0 & -\lambda+2 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2+2\lambda\end{pmatrix}$ donc λ est solution soit de $-\lambda+2=0$ soit de $-\lambda^2+2\lambda=0$
   Par conséquent, $\lambda\in\{0,2\}$

   (d) On commence par expliciter $A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda+3 & 4 & -4\\ -2 & -\lambda-1 & 2\\ -2 & 0 & -\lambda+1\end{pmatrix}$, par utilisation du pivot de Gauss, on aboutit à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix}-2 & -\lambda-1 & 2\\ 0 & \lambda+1 & -\lambda-1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda^2-2\lambda+\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ donc λ est solution soit de $\lambda+1=0$ soit de $\frac{1}{2}\lambda^2-2\lambda+\frac{3}{2}=0$
   Par conséquent, $\lambda\in\lambda\in\{-1,1,3\}$

   (e) On commence par expliciter $A-\lambda I_3=\begin{pmatrix}-\lambda-2 & 5 & 7\\ -1 & -\lambda+6 & 9\\ 0 & -2 & -\lambda-3\end{pmatrix}$, par utilisation du pivot de Gauss, on aboutit à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix}-1 & -\lambda+6 & 9\\ 0 & -2 & -\lambda-3\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda^3+\frac{1}{2}\lambda^2\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc λ est solution de

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\lambda^3+\frac{1}{2}\lambda^2\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2} &= 0\Leftrightarrow-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=0\Leftrightarrow-\lambda^2(\lambda-1)+(\lambda-1)=0\\ &\Leftrightarrow (\lambda-1)(-\lambda^2+1)=0\Leftrightarrow(\lambda-1)(1-\lambda)(1+\lambda)=0\end{aligned}$$

   Par conséquent, $\lambda\in\lambda\in\{-1,1\}$

2. (a) $E_{-1}=\text{Vect}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $E_2=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $E_5=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

   (b) $E_{-1}=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $E_0=\text{Vect}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $E_3=\text{Vect}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$

   (c) $E_0=\text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $E_0=\text{Vect}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $E_3=\text{Vect}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$

   (d) $E_{-1}=\text{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $E_0=\text{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $E_3=\text{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

(e) $E_{-1} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

3. $e_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

correction de l'exercice 2

1. On procède par récurrence dont voici la justification rapide. Initialisation $n = 0$, $A^0X_0 = IX_0 = X_0$ et $\lambda^0 X_0 = X_0$, hérédité :
$$A^{n+1}X_0 = A^n(AX_0) = A^n(\lambda X_0) = \lambda(A^nX_0) = \lambda(\lambda^n X_0) = \lambda^{n+1}X_0$$

2. En multipliant cette égalité par X_0 et en utilisant la question 1, on a
$$\begin{aligned} A^3X_0 + aA^2X_0 + bAX_0 + cI_nX_0 &= 0_nX_0 \Leftrightarrow A^3X_0 + aA^2X_0 + bAX_0 + cX_0 = 0_{n,1} \\ &\Leftrightarrow \lambda^3X_0 + a\lambda^2X_0 + b\lambda X_0 + cX_0 = 0_{n,1} \Leftrightarrow (\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)X_0 = 0_{n,1} \end{aligned}$$
Comme X_0 n'est pas le vecteur nul et que $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ est un réel, on en déduit que $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$.

3. Je laisse le lecteur vérifié les égalités matricielles.

(a) On applique la même méthode qu'au 2, ce qui donne $\lambda^2 = 2\lambda$ donc $\lambda \in \{0, 2\}$.
$E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) On applique la même méthode qu'au 2, ce qui donne $\lambda^2 = \lambda$ donc $\lambda \in \{0, 1\}$.
On commence par expliciter $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda - 1 & -1 & 2 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -2 & -1 & -\lambda + 3 \end{pmatrix}$, par utilisation du pivot de Gauss, on aboutit à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & \lambda - 1 & -\lambda + 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda \end{pmatrix}$ donc λ est solution soit de $\lambda - 1 = 0$ soit de $\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda = 0$.
Par conséquent, $\lambda \in \{0, 1\}$.
$E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \text{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) On applique la même méthode qu'au 2, ce qui donne $\lambda^2 = 6\lambda - 5$ donc $\lambda \in \{1, 5\}$
On commence par expliciter $A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -\lambda + 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda + 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda + 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda + 2 \end{pmatrix}$, par utilisation du pivot de Gauss, on aboutit à la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda + 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & -\lambda + 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^2 + 6\lambda - 5 \end{pmatrix}$ donc λ est solution soit de $\lambda - 1 = 0$ soit de $-\lambda^2 + 6\lambda - 5 = 0$. Par conséquent, $\lambda \in \{1, 5\}$

$E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$