correction de l'exercice 1

1. Liberté de (e_1, e_2) : Soient a, b deux réels tels que

$$ae_1 + be_2 = 0_{\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b=0 \\ a+2b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=0 \\ b=0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

Par conséquent, la famille (e_1, e_2) est bien libre.

(e_1, e_2) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, existe-t-il deux réels a, b, c tels que

$$X = ae_1 + be_2 \Leftrightarrow a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b=x \\ a+2b=y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=2x-y \\ b=-x+y \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

Ainsi, les réels a et b existent bien, ce qui entraine que la famille (e_1, e_2) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

2. $f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 3e_1, \quad f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$.
Déterminons les deux réels a et b tels que

$$\begin{aligned} f(e_2) &= ae_1 + be_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\a+2b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b=5 \\ a+2b=4 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=6 \\ b=-1 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right. \Rightarrow f(e_2) = 6e_1 - e_2 \end{aligned}$$

3. Il s'agit d'exprimer les images de chaque vecteur de la base de l'espace de départ ($f(e_1), f(e_2)$ ici) comme combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'espace d'arrivée (e_1, e_2 ici), ce qui a été traité à la question précédente. La matrice A est donc égale à

$$A = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \end{array}$$
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array}$$

4. D'après la question 2, on peut écrire $f(e_2) = -e_2 + 6e_1, \quad f(e_1) = 3e_1$, ce qui nous donne

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_2) & f(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_2 \\ e_1 \end{array}$$

5. Par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, on a

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(h_1) & f(h_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ h_1 \\ h_2 \end{array}$$

ce qui impose aux vecteurs h_1, h_2 de vérifier les égalités suivantes $f(h_1) = -1 \times h_1$ et $f(h_2) = 3 \times h_2$. Il faut également que la famille (h_1, h_2) soit une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (ce qui entraine qu'aucun de ces vecteurs n'est nul). Commençons par déterminer ces vecteurs. Si l'on note $h_1 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} f(h_1) &= -h_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+2b\\2a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+2b=-a \\ 2a+b=-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2a+2b=0 \\ 2a+2b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \{2a+2b=0 \Leftrightarrow \{a=-b \\ &\Leftrightarrow h_1 = \begin{pmatrix}-b\\b\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

On choisit $h_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. De même, si l'on note $h_2 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} f(h_2) &= 3h_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+2b\\2a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3a\\3b\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+2b=3a \\ 2a+b=3b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -2a+2b=0 \\ 2a-2b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -2a+2b=0 \\ 0=0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \{a=b \Leftrightarrow h_2 = \begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

On choisit $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il reste à vérifier que la famille (h_1, h_2) ainsi obtenue est bien une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Liberté de (h_1, h_2) : Soient a, b deux réels tels que

$$ah_1 + bh_2 = 0_{\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a+b=0 \\ a+b=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2a=0 \\ 2b=0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a=0 \\ b=0 \end{array} \right.$$

Par conséquent, la famille (h_1, h_2) est bien libre.

(h_1, h_2) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, existe-t-il deux réels a, b, c tels que

$$X = ah_1 + bh_2 \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a+b=x \\ a+b=y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2a=x-y \\ 2b=x+y \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right.$$

Ainsi, les réels a et b existent bien, ce qui entraine que la famille (h_1, h_2) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. La matrice de f dans cette base est donc $C = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(h_1) & f(h_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} \end{array}$

correction de l'exercice 2

1. Liberté de (e_1, e_2) : Soient a, b deux réels tels que

$$ae_1 + be_2 = 0_{\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+b=0 \\ -a+b=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a=0 \\ 2b=0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a=0 \\ b=0 \end{array} \right.$$

Par conséquent, la famille (e_1, e_2) est bien libre.

(e_1, e_2) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, existe-t-il deux réels a, b, c tels que

$$X = ae_1 + be_2 \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+b=x \\ -a+b=y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a=x-y \\ 2b=x+y \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right.$$

Ainsi, les réels a et b existent bien, ce qui entraine que la famille (e_1, e_2) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

2. $f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exprimons $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2).

$$\begin{aligned} f(e_1) &= ae_1 + be_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -a+b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+b=-1 \\ -a+b=0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a=-1 \\ 2b=-1 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow f(e_2) = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \\ f(e_2) &= ae_1 + be_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ -a+b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+b=7 \\ -a+b=-2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a=9 \\ 2b=5 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=\dfrac{9}{2} \\ b=\dfrac{5}{2} \end{array} \right. \Rightarrow f(e_2) = \frac{9}{2}e_1 + \frac{5}{2}e_2 \end{aligned}$$

3. Il s'agit d'exprimer les images de chaque vecteur de la base de l'espace de départ ($f(e_1), f(e_2)$ ici) comme combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'espace d'arrivée (e_1, e_2 ici), ce qui a été traité à la question précédente. La matrice A est donc égale à

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{9}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

4. D'après la question 2, on peut écrire $f(e_2) = \frac{5}{2}e_2 + \frac{9}{2}e_1$, $\quad f(e_1) = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_1$, ce qui nous donne

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(e_2) & f(e_1) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_2 \\ e_1 \end{array} \end{array}$$

5. Par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, on a

$$C = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(h_1) & f(h_2) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} \end{array}$$

ce qui impose aux vecteurs h_1, h_2 de vérifier les égalités suivantes $f(h_1) = 1 \times h_1$ et $f(h_2) = 1 \times h_1 + 1 \times h_2$. Il faut également que la famille (h_1, h_2) soit une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (ce qui entraine qu'aucun de ces vecteurs n'est nul). Commençons par déterminer ces vecteurs. Si l'on note $h_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} f(h_1) &= h_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a+4b \\ -a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3a+4b = a \\ -a-b = b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a+4b = 0 \\ -a-2b = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a+4b = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \{2a+4b = 0 \Leftrightarrow \{a = -2b \Leftrightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -2b \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On choisit $h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même, si l'on note $h_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} f(h_2) &= h_1 + h_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a+4b \\ -a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3a+4b = a-2 \\ -a-b = b+1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a+4b = -2 \\ -a-2b = 1 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a+4b = -2 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \{2a+4b = -2 \Leftrightarrow \{a = -2b-1 \Leftrightarrow h_2 = \begin{pmatrix} -2b-1 \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a une infinité de possibilités pour le vecteur h_2. En choisissant $b = 0$, on obtient le vecteur (non nul) $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il reste à vérifier que la famille (h_1, h_2) ainsi obtenue est bien une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Liberté de (h_1, h_2) : Soient a, b deux réels tels que

$$ah_1 + bh_2 = 0_{\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2a-b = 0 \\ a = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent, la famille (h_1, h_2) est bien libre.

(h_1, h_2) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$: Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, existe-t-il deux réels a, b, c tels que

$$X = ah_1 + bh_2 \Leftrightarrow a\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2a-b = x \\ a = y \end{array} \right.$$

Ainsi, les réels a et b existent bien, ce qui entraine que la famille (h_1, h_2) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. La matrice de f dans cette base est donc $C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(h_1) & f(h_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} \end{array}$

correction de l'exercice 3

1. Liberté de (e_1, e_2, e_3) : Soient a, b, c trois réels tels que

$$\begin{aligned} ae_1 + be_2 + ce_3 &= 0_{\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+c = 0 \\ a+b = 0 \\ b+c = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+c = 0 \\ b-c = 0 \\ b+c = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a+c = 0 \\ b-c = 0 \\ -2c = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (e_1, e_2, e_3) est bien libre.
<u>(e_1, e_2, e_3) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$</u> : Soit $X = (x, y, z) \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, existe-t-il trois réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned} X &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& x \\ a+b &=& y \\ b+c &=& z \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& x \\ b-c &=& -x+y \\ b+c &=& z \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& x \\ b-c &=& -x+y \\ 2c &=& x-y+z \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de c puis b et enfin a, ce qui entraine que la famille (e_1, e_2, e_3) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

2. $f(e_1) = f(1,1,0) = (-1,7,0)$, $\quad f(e_2) = f(0,1,1) = (1,2,3)$, $\quad f(e_3) = f(1,0,1) = (2,1,3)$
Exprimons $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$, resp. $f(e_3)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{aligned} f(e_1) &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (-1,7,0) = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& -1 \\ a+b &=& 7 \\ b+c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& -1 \\ b-c &=& 8 \\ b+c &=& 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& -1 \\ b-c &=& 8 \\ 2c &=& -8 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} c = -4 \\ b = 4 \\ a = 3 \end{array} \right. \\ f(e_2) &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (1,2,3) = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 1 \\ a+b &=& 2 \\ b+c &=& 3 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 1 \\ b-c &=& 1 \\ b+c &=& 3 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 1 \\ b-c &=& 1 \\ 2c &=& 2 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 0 \end{array} \right. \\ f(e_3) &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (2,1,3) = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 2 \\ a+b &=& 1 \\ b+c &=& 3 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 2 \\ b-c &=& -1 \\ b+c &=& 3 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 2 \\ b-c &=& -1 \\ 2c &=& 4 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} c = 2 \\ b = 1 \\ a = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Soit sous une forme synthétique

$$f(e_1) = 3e_1 + 4e_2 - 4e_3 \quad f(e_2) = 0 \times e_1 + 2e_2 + e_3 \quad f(e_3) = 0 \times e_1 + e_2 + 2e_3$$

3. Il s'agit d'exprimer les images de chaque vecteur de la base de l'espace de départ ($f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ ici) comme combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'espace d'arrivée (e_1, e_2, e_3 ici), ce qui a été traité à la question précédente. La matrice A est donc égale à

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

4. D'après la question 2, on peut écrire

$$f(e_2) = 2e_2 + e_3 + 0 \times e_1, \quad f(e_3) = e_2 + 2e_3 + 0 \times e_1, \quad f(e_1) = 4e_2 - 4e_3 + 3e_1$$

donc la matrice B de f dans la base (e_2, e_3, e_1) est donnée par

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_2) & f(e_3) & f(e_1) \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_2 \\ e_3 \\ e_1 \end{array} \end{array}$$

D'après la question 2, on peut écrire

$$f(e_3) = 2e_3 + 0 \times e_1 + e_2, \quad f(e_1) = -4e_3 + 3e_1 + 4e_2, \quad f(e_2) = e_3 + 0 \times e_1 + 2e_2$$

donc la matrice C de f dans la base (e_3, e_1, e_2) est donnée par

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_3) & f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ C = & \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

5. Par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, on a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(h_1) & f(h_2) & f(h_3) \end{array} \\ D = & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{array} \end{array}$$

ce qui impose aux vecteurs h_1, h_2, h_3 de vérifier les égalités suivantes

$$f(h_1) = 3h_1, \quad f(h_2) = 3h_2, \quad f(h_3) = h_3.$$

Il faut également que la famille (h_1, h_2, h_3) soit une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (ce qui entraine qu'aucun de ces vecteurs n'est nul et qu'aucun ne soit colinéaire à l'un des autres, même si cela n'est pas suffisant). Commençons par déterminer ces vecteurs. On constate que h_1 et h_2 sont solutions de l'équation $f(X) = 3X$. Si l'on note $X = (x, y, z)$, on a

$$\begin{aligned} f(X) &= 3X \Leftrightarrow (-y+2z, 3x+4y-2z, 3z) = 3(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -y+2z &=& 3x \\ 3x+4y-2z &=& 3y \\ 3z &=& 3z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x-y+2z &=& 0 \\ 3x+y-2z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x-y+2z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } x \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ x = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \right. \Leftrightarrow X = \left(-\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z, y, z \right) \\ &\Leftrightarrow X = \left(-\frac{1}{3}y, y, 0 \right) + \left(\frac{2}{3}z, 0, z \right) = y\left(-\frac{1}{3}, 1, 0 \right) + z\left(\frac{2}{3}, 0, 1 \right) \\ &\Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left\{ \left(-\frac{1}{3}, 1, 0 \right), \left(\frac{2}{3}, 0, 1 \right) \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ 3\left(-\frac{1}{3}, 1, 0 \right), 3\left(\frac{2}{3}, 0, 1 \right) \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ (-1,3,0), (2,0,3) \right\} \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut choisir $h_1 = (-1, 3, 0)$ et $h_2 = (2, 0, 3)$.
Déterminons maintenant un vecteur h_3.

$$\begin{aligned} f(X) &= X \Leftrightarrow (-y+2z, 3x+4y-2z, 3z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -y+2z &=& x \\ 3x+4y-2z &=& y \\ 3z &=& z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x-y+2z &=& 0 \\ 3x+3y-2z &=& 0 \\ 2z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ -x-y &=& 0 \\ 3x+3y &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ -x-y &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } x \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z = 0 \\ x = -y \end{array} \right. \Leftrightarrow X = (-y, y, 0) = y(-1, 1, 0) \end{aligned}$$

On peut choisir $h_3 = (-1, 1, 0)$. En résumé, on choisit

$$h_1 = (-1, 3, 0), \quad h_2 = (2, 0, 3), \quad h_3 = (-1, 1, 0)$$

Montrons maintenant que la famille (h_1, h_2, h_3) est une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
Liberté de (h_1, h_2, h_3) : Soient a, b, c trois réels tels que

$$\begin{aligned} ah_1 + bh_2 + ch_3 &= 0_{\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a(-1,3,0) + b(2,0,3) + c(-1,1,0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a+2b-c = 0 \\ 3a+c = 0 \\ 3b = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a+2b-c = 0 \\ 6b-2c = 0 \\ 3b = 0 \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par conséquent, la famille (h_1, h_2, h_3) est bien libre.
(h_1, h_2, h_3) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: Soit $X = (x, y, z) \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, existe-t-il trois réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned} X &= ah_1 + bh_2 + ch_3 \Leftrightarrow a(-1,3,0) + b(2,0,3) + c(-1,1,0) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -a+2b-c &=& x \\ 3a+c &=& y \\ 3b &=& z \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -a+2b-c &=& x \\ 6b-2c &=& 3x+y \\ 3b &=& z \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } a \text{ »} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& x \\ b-c &=& -x+y \\ 2c &=& x-y+z \end{array} \right. \left| \begin{array}{c} \text{« } \textit{Pivot pour } b \text{ »} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence de b puis c et enfin a, ce qui entraine que la famille (h_1, h_2, h_3) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
La matrice D de f dans la base (h_1, h_2, h_3) est donc donnée par

$$D = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(h_1) & f(h_2) & f(h_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{array} \end{array}$$

6. Il s'agit d'exprimer chaque vecteur de la « nouvelle base» (ici (h_1, h_2, h_3)) comme combinaison linéaire des vecteurs de « l'ancienne base » (ici (e_1, e_2, e_3)). D'après les calculs de la question 1 correspondant au caractère générateur de la famille (e_1, e_2, e_3), on a

$$\begin{aligned} h_1 &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (-1,3,0) = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& -1 \\ a+b &=& 3 \\ b+c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& -1 \\ b-c &=& 4 \\ 2c &=& -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c=-2 \\ a=1 \\ b=2 \end{array} \right. \Leftrightarrow h_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3 \\ h_2 &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (2,0,3) = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 2 \\ a+b &=& 0 \\ b+c &=& 3 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& 2 \\ b-c &=& -2 \\ 2c &=& 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c=\frac{5}{2} \\ a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow h_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{5}{2}e_3 \\ h_3 &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (-1,1,0) = a(1,1,0) + b(0,1,1) + c(1,0,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& -1 \\ a+b &=& 1 \\ b+c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c &=& -1 \\ b-c &=& 2 \\ 2c &=& -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c=-1 \\ a=0 \\ b=1 \end{array} \right. \Leftrightarrow h_3 = e_2 - e_3 \end{aligned}$$

En résumé, on a

$$h_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, \quad h_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{5}{2}e_3, \quad h_3 = e_2 - e_3$$

La matrice P est donc égale à

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & \frac{5}{2} & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

7. On a $A = PBP^{-1}$ donc $A^n = PB^nP^{-1}$. La matrice B étant diagonale, on a $B^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Je laisse le lecteur vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ce qui nous permet d'expliciter A^n

$$PB^n = \begin{pmatrix} 3^n & -\frac{1}{2}3^n & 0 \\ 2 \times 3^n & \frac{1}{2}3^n & 1 \\ -2 \times 3^n & \frac{5}{2}3^n & -1 \end{pmatrix}, \quad A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 2 \times 3^n - 2 & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} \\ -2 \times 3^n + 2 & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}3^n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

correction de l'exercice 4

1. Liberté de (e_1, e_2, e_3) : Soient a, b, c trois réels tels que

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_{\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{array}\right.$$

Par conséquent, la famille (e_1, e_2, e_3) est bien libre.
(e_1, e_2, e_3) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: Soit $X = (x, y, z) \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, existe-t-il trois réels a, b, c tels que

$$X = ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a+b+c &=& x \\ b+c &=& y \\ c &=& z \end{array}\right.$$

On en déduit l'existence de c puis b et enfin a, ce qui entraine que la famille (e_1, e_2, e_3) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

2. $f(e_1) = f(1,0,0) = (1,2,0), \quad f(e_2) = f(1,1,0) = (1,5,0), \quad f(e_3) = f(1,1,1) = (1,7,1)$
Exprimons $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$, resp. $f(e_3)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3).

$$\begin{aligned} f(e_1) &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (1,2,0) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a+b+c &=& 1 \\ b+c &=& 2 \\ c &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c=0 \\ b=2 \\ a=-1 \end{array}\right. \\ f(e_2) &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (1,5,0) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a+b+c &=& 1 \\ b+c &=& 5 \\ c &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c=0 \\ b=5 \\ a=-4 \end{array}\right. \\ f(e_3) &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (1,7,1) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a+b+c &=& 1 \\ b+c &=& 7 \\ c &=& 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c=1 \\ b=6 \\ a=-6 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Soit sous une forme synthétique

$$f(e_1) = -e_1 + 2e_2 \quad f(e_2) = -4e_1 + 5e_2 \quad f(e_3) = -6e_1 + 6e_2 + e_3$$

3. Il s'agit d'exprimer les images de chaque vecteur de la base de l'espace de départ ($f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ ici) comme combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'espace d'arrivée (e_1, e_2, e_3 ici), ce qui a été traité à la question précédente. La matrice A est donc égale à

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

4. D'après la question 2, on peut écrire

$$f(e_2) = 5e_2 + 0 \times e_3 - 4e_1, \quad f(e_3) = 6e_2 + e_3 - 6e_1, \quad f(e_1) = 2e_2 + 0 \times e_3 - e_1$$

donc la matrice B de f dans la base (e_2, e_3, e_1) est donnée par

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_2) & f(e_3) & f(e_1) \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_2 \\ e_3 \\ e_1 \end{array} \end{array}$$

D'après la question 2, on peut écrire

$$f(e_3) = e_3 - 6e_1 + 6e_2, \quad f(e_1) = 0 \times e_3 - e_1 + 2e_2, \quad f(e_2) = 0 \times e_3 - 4e_1 + 5e_2$$

donc la matrice C de f dans la base (e_3, e_1, e_2) est donnée par

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_3) & f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ C = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & -4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

5. Par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée, on a

$$D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(h_1) & f(h_2) & f(h_3) \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{array} \end{array}$$

ce qui impose aux vecteurs h_1, h_2, h_3 de vérifier les égalités suivantes

$$f(h_1) = h_1, \quad f(h_2) = 3h_2, \quad f(h_3) = h_3.$$

Il faut également que la famille (h_1, h_2, h_3) soit une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (ce qui entraine qu'aucun de ces vecteurs n'est nul et qu'aucun ne soit colinéaire à l'un des autres, même si cela n'est pas suffisant). Commençons par déterminer ces vecteurs. On constate que h_1 et h_3 sont solutions de l'équation $f(X) = X$. Si l'on note $X = (x, y, z)$, on a

$$\begin{aligned} f(X) &= X \Leftrightarrow (x, 2x+3y+2z, z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ 2x+3y+2z &=& y \\ z &=& z \end{array} \right. \Leftrightarrow \{2x+2y+2z = 0 \\ &\Leftrightarrow \{x = -y-z = 0 \Leftrightarrow X = (-y-z, y, z) = y\,(-1,1,0) + z\,(-1,0,1) \Leftrightarrow X \in \text{Vect}\{(-1,1,0), (-1,0,1)\} \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut choisir $h_1 = (-1,1,0)$ et $h_3 = (-1,0,1)$.

Déterminons maintenant un vecteur h_2. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, 2x+3y+2z, z) \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} f(X) &= 3X \Leftrightarrow (x, 2x+3y+2z, z) = 3(x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 3x \\ 2x+3y+2z &=& 3y \\ z &=& 3z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -2x &=& 0 \\ 2x+2z &=& 0 \\ -2z &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow X = (0,y,0) = y(0,1,0) \end{aligned}$$

On peut choisir $h_2 = (0,1,0)$. En résumé, on choisit

$$h_1 = (-1,1,0), \quad h_2 = (0,1,0), \quad h_3 = (-1,0,1)$$

Montrons maintenant que la famille (h_1, h_2, h_3) est une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

Liberté de (h_1, h_2, h_3) : Soient a, b, c trois réels tels que

$$ah_1 + bh_2 + ch_3 = 0_{\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow a\,(-1,1,0) + b(0,1,0) + c\,(-1,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -a-c = 0 \\ a+b = 0 \\ c = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent, la famille (h_1, h_2, h_3) est bien libre.

(h_1, h_2, h_3) famille génératrice de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: Soit $X = (x,y,z) \in \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, existe-t-il trois réels a, b, c tels que

$$X = ah_1 + bh_2 + ch_3 \Leftrightarrow a\,(-1,1,0) + b(0,1,0) + c\,(-1,0,1) = (x,y,z) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -a-c &=& x \\ a+b &=& y \\ c &=& z \end{array} \right.$$

On en déduit l'existence de c puis a et enfin b, ce qui entraine que la famille (h_1, h_2, h_3) est bien génératrice de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et comme elle est libre, il s'agit d'une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

La matrice D de f dans la base (h_1, h_2, h_3) est donc donnée par

$$D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(h_1) & f(h_2) & f(h_3) \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{array} \end{array}$$

6. Il s'agit d'exprimer chaque vecteur de la « nouvelle base» (ici (h_1, h_2, h_3)) comme combinaison linéaire des vecteurs de « l'ancienne base » (ici (e_1, e_2, e_3)). D'après les calculs de la question 1 correspondant au caractère générateur de la famille (e_1, e_2, e_3), on a

$$\begin{aligned} h_1 &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (-1,1,0) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c &=& -1 \\ b+c &=& 1 \\ c &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ b = 1 \\ a = -2 \end{array} \right. \\ h_2 &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (0,1,0) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ b+c &=& 1 \\ c &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ b = 1 \\ a = -1 \end{array} \right. \\ h_3 &= ae_1 + be_2 + ce_3 \Leftrightarrow (-1,0,1) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c &=& -1 \\ b+c &=& 0 \\ c &=& 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = 1 \\ b = -1 \\ a = -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En résumé, on a

$$h_1 = -2e_1 + e_2, \quad h_2 = -e_1 + e_2, \quad h_3 = -e_1 - e_2 + e_3$$

La matrice P est donc égale à

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

7. On a $A = PBP^{-1}$ donc $A^n = PB^nP^{-1}$. La matrice B étant diagonale, on a $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Je laisse le lecteur vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ce qui nous permet d'expliciter A^n

$$PB^n = \begin{pmatrix} -2 & -3^n & -1 \\ 1 & 3^n & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -3^n + 2 & -2 \times 3^n + 2 & -3 \times 3^n + 3 \\ 3^n - 1 & 2 \times 3^n - 1 & 3 \times 3^n - 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$