Exercice 1
Résoudre les équations suivantes :

$$(E_1) : 3x^4 + 5x^2 - 2 = 0 \quad (E_2) : (\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0 \quad (E_3) : x = \sqrt{x} + 2$$

$$(E_4) : e^x + e^{-x} = 2 \qquad (E_5) : e^{2x-2} + e^{x+1} - 2e^4 = 0$$

$$(E_6) : x^2 - 3x + 4 + \frac{8-6x}{x^2-2} = 0 \quad (E_7) : \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x-1} = 2 - x + x^2$$

Exercice 2
Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a, b (éventuellement c) tels que

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x+1)(x+2) + b(x+2) = 3x^2 + 2x - 8.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}, \quad \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x}.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1) = (x+1)^2$
4. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, -1, 0\}, \quad \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}.$

Exercice 3
Résoudre les inéquations suivantes

$$(I_1) : \frac{x}{x+1} \leqslant \frac{x+1}{x-1} \qquad (I_2) : \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x(x-1)} \leqslant 1 \qquad (I_3) : \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{x-1}{(x-1)^2}$$

$$(I_4) : 5\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 10^{-10} \qquad (I_5) : \ln(3x+1) \leqslant \ln(2x-1) \qquad (I_6) : \sqrt{x+5} \geqslant \sqrt{x^2-4}$$

Exercice 4
Déterminer les limites suivantes :

$\boxed{\text{niveau 1}}$:
a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{[\ln(x^4)]^3}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\exp(3x^2)}{x^6}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$

$\boxed{\text{niveau 2}}$:
a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left[3x^2 + (\ln x)^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[\exp(x^2) - e^{3x} + x^2\right]$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (e^{-3x} - \frac{1}{x} + x - e^{x^2})$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln(x^2+1) - 2\ln x)$

Exercice 5
Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes :

$\boxed{\text{en } +\infty}$: $a(x) = \dfrac{x^2+e^x}{x+1}$ $\quad b(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad c(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x+1}$ $\quad d(x) = \dfrac{xe^x+1}{e^x+1}$

$\boxed{\text{en } -\infty}$: $a(x) = \dfrac{x^2+e^x}{x+1}$ $\quad b(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad c(x) = \dfrac{xe^x+1}{e^x+1}$ $\quad d(x) = \ln(e^x + e^{-x})$

Exercice 6
Déterminer l'ensemble de définition, l'ensemble de continuité et l'ensemble de dérivabilité des fonctions suivantes. Calculer ensuite les dérivées correspondantes.

$$a(x) = \ln(1+x^2) \quad b(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-1} \quad c(x) = \exp(x + 1/x) \quad d(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$

Exercice 7
Représenter graphiquement les fonctions sur leur domaine de définition respectif.
Etudier graphiquement la continuité de ces fonction. En revenant à la définition, justifier la continuité ou la non continuité de chacune de ces fonctions.

$$a(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x \geqslant 3 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ e^x - e & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

Exercice 8

1. Justifier que la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x-x^2}$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. Est-elle dérivable en 1 ? en 0 ? Expliciter f'.
2. Justifier que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et dérivables sur $\mathbb{R}_+^\times$.

$$a : x \mapsto \begin{cases} x\ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b : x \mapsto \begin{cases} x^2\ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Sont-elles dérivables en 0 ? Si oui, calculer la dérivée correspondante.

Exercice 9
Justifier les inégalités suivantes :

a) $\forall x \geqslant 1, \quad \ln x \leqslant x - 1$ $\qquad$ b) $\forall x > 0, \quad \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{5} \geqslant 2\sqrt{10}$

c) $\forall x \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[, \quad x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{e}$ $\qquad$ c) $\forall x \geqslant 0, \quad e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$

Exercice 10
Déterminer la convexité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition respectif (ainsi que les éventuels points d'inflexions) puis tracer le graphe de ces fonctions.

$$a : x \mapsto 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1 \quad b : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \quad c : x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$