Bijections

Exercice 1
On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à expliciter.

Exercice 2
Montrer que l'équation $\dfrac{x^3}{x^2+1} = 1$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$.
Si α désigne cette solution, justifier que $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Exercice 3
Montrer que l'équation $3 - 2x = e^x$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
Vérifier que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Est-ce que $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$?
Valeurs numériques : $e = 2.718 \pm 10^{-3}, \quad e^{1/2} \simeq 1.648 \pm 10^{-3}$

Exercice 4
On considère la fonction $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que l'équation $x + \ln x = 2005$ admet une seule solution α sur $]0, +\infty[$ et que $1997 \leqslant \alpha \leqslant 1998$
   Valeurs numériques : $\ln 1997 \simeq \ln 1998 \simeq 7.6 \pm 10^{-1}$.

Exercice 5
Déterminer le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ des équations suivantes

$$\begin{aligned} (E_1) &\quad : \quad 2x^3 - 3x^2 - 12x = 1 \\ (E_2) &\quad : \quad 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 = 8 \end{aligned}$$

Fonctions de deux variables

Exercice 6
Calculer les dérivées partielles du premier ordre et du second ordre des fonctions suivantes
(*on ne s'occupera pas des domaines d'existence, ni de la justification de la dérivabilité*)

$$\begin{array}{lll} a : (x,y) \mapsto y^2 - x^2y + x^4 & b : (x,y) \mapsto y^3 - x^2y & c : (x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2) \\ d : (x,y) \mapsto (x^2+y^2)e^{-xy} & e : (x,y) \mapsto x(\ln y)^2 + y^2 & f : (x,y) \mapsto \dfrac{x-y}{x^2+y} \end{array}$$

Exercice 7
Les fonctions suivantes admettent-elles des points critiques sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, expliciter la nature de ces points (minima, maxima, etc.)

$$\begin{array}{ll} a : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 & b : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + (3-x-y)^2 \\ c : (x,y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3 & d : (x,y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \end{array}$$

Exercice 8
Déterminer, lorsqu'ils existent, les extrémas locaux des fonctions suivantes :

1. $a : (x,y) \mapsto x[(\ln x)^2 + y^2]$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$ (i.e. $x > 0$ et y quelconque)
2. $b : (x,y) \mapsto x^2y + \ln(1+y^2)$ sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (i.e. x et y quelconques)
3. $c : (x,y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$ sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (i.e. x et y quelconques)