Exercice 1
Ecrire sans le symbole $\sum$ les expressions ci-dessous :

$$\sum_{k=1}^{5} k^2, \quad \sum_{j=3}^{8} \frac{j^2}{3^j}, \quad \sum_{n=1}^{5} (-1)^{n^2} \frac{x^{2n+4}}{n}, \quad \sum_{p=3}^{5} x(1-x^2)^p, \quad \sum_{s=2}^{s=8} \frac{s^2}{s^2+1}$$

Exercice 2
Ecrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$

$$A = 2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + n^5 \quad B = 1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + (-1)^n a^n \quad C = \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^6}{6} + \cdots + \frac{a^{2n}}{2n}$$

$$D = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + .. + \frac{2^{2005}}{2006} \quad E = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} \quad F = \ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n)$$

Exercice 3
Calculer les sommes suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1), \quad B_n = \sum_{k=0}^{n+1} (6k^2 + 4k + 1), \quad C = \sum_{p=945}^{2005} 3 \quad D_n = \sum_{k=1}^{2n} k(2k-1)(k+1)$$

$$E_n = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \cdots + 2^{2n} \qquad F_n = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \cdots + (-1)^n 3^n$$

$$G_n = 2.3^2 + 2.3^3 + 2.3^4 + \cdots + 2.3^n \quad H_n = -8.7^2 + 8.7^3 - 8.7^4 + \cdots + 8.7^{2005} - 8.7^{2006}$$

$$I_n = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{3}{10^\alpha}, \quad J_n = \sum_{i=0}^{2n} 3 \times 4^{i+1}, \quad K_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{5 \times 2^j}{3^{j+1}}, \quad L_N = \sum_{i=0}^{N+1} 3^{2i+1}$$

$$M_n = \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^p, \quad N_n = \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2^k}{3^{k+2}}, \quad O_N = \sum_{n=1}^{N} \left(5.2^n + 2.3^{2n}\right), \quad P_k = \sum_{n=3}^{2k} 2^{3n+1}.\frac{3^{n+1}}{4^n}$$

Exercice 4
Vérifier rapidement que les égalités suivantes : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}, \quad \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{k+1} + \dfrac{1}{k+2}\right)$
Calculer alors $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ puis $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 5
Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \quad \dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}.$
En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{k-5}{k(k^2-1)}.$

Exercice 6
Soit $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ une famille de nombres réels. Justifier l'égalité suivante $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - na_n$

Exercice 7
Montrer par récurrence que

$a)$ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$ $b)$ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$ $c)$ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

$d)$ $(q \in \mathbb{R}\backslash\{1\})$ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $e)$ $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$

$f)$ $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$ $g)$ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k.2^{k-1} = n.2^{n+1} + 1$

$h)$ $(a \in \mathbb{R}_+),$ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na,$ $i)$ $\forall n \geqslant 3, \quad n! \geqslant 2 \times 3^{n-2}$ $j)$ $\forall n \geqslant 5, \quad \dfrac{3^n}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-7}}$