

**Exercice 1**

Expliciter le terme général des suites suivantes en fonction de l'indice.

$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad a_{k+1} = -2a_k \text{ avec } a_1 = 7 \quad \forall n \geq 2, \quad 2b_n = b_{n-1} \text{ avec } b_1 = 3.$$

$$\forall p \geq 0, \quad c_{p+1} - c_p = 3 \text{ et } c_0 = 10. \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad d_n = \frac{d_{n-1}}{3} + 4 \text{ avec } d_0 = 1.$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad 4e_{i+1} + 1 = e_i \text{ avec } e_0 = 0. \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad 3f_{j+1} - 2f_j = 1 \text{ avec } f_0 = 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2h_{n+2} + h_{n+1} - h_n = 0 \text{ avec } h_0 = h_1 = 1.$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^\times, \quad l_{m+1} = l_m + l_{m-1} \text{ avec } l_0 = 1 \text{ et } l_1 = 2.$$

**Exercice 2**

Soit  $u$  une suite vérifiant  $\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = 2u_n + n$  et  $u_0 = 1$ .

1. Montrer qu'il existe un couple  $(a, b)$  de réels tel que la suite  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = an + b$  vérifie la relation  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = 2w_n + n$ .
2. Montrer que la suite  $z_n = u_n + n + 1$  vérifie  $z_{n+1} = 2z_n$ .
3. En déduire l'expression de  $z_n$  en fonction de  $n$  puis celle de  $u_n$ .

**Exercice 3**

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux suites satisfaisant la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_{k+1} = 3\alpha_k + \beta_k \\ \beta_{k+1} = 2\alpha_k + 4\beta_k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha_0 = 2 \\ \beta_0 = -1 \end{cases}$$

On introduit deux suites auxiliaires  $z$  et  $t$  en posant  $z_k = \alpha_k + \beta_k$  et  $t_k = 2\alpha_k - \beta_k$ .

1. Montrer que les deux suites  $z$  et  $t$  sont géométriques.
2. Donner l'expression de  $z_k$  et  $t_k$  en fonction de  $k$ , puis celle de  $\alpha_k$  et  $\beta_k$ .

**Exercice 4**

Soit  $(u_p)_{p \geq 0}$  une suite satisfaisant à la relation  $\forall p \geq 0, \quad u_{p+1} = 2u_p + 5^p$ .

Pour expliciter le terme général de cette suite, on pose  $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha_p = \frac{u_p}{5^p}$ .

1. Vérifier que  $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{p+1} = \frac{2}{5}\alpha_p + \frac{1}{5}$ .
2. En déduire l'expression de  $\alpha_p$  en fonction de  $p$  puis celle de  $u_p$ .

**Exercice 5**

On considère deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$$

1. On considère la suite  $p$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = u_n + v_n$ .  
Montrer que la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.  
En déduire l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .

2. A l'aide de la question précédente, montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n$ .

3. Montrer que la suite  $z_n = \frac{v_n}{3^n}$  est arithmétique.  
En déduire l'expression de  $z_n$  en fonction de  $n$ .

4. Donner enfin l'expression de  $v_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 6**

On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{R}_+$ .

On introduit alors la suite auxiliaire  $t$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$ .

2. Montrer que la suite  $t$  est géométrique.
3. Expliciter alors  $t_n$  en fonction de  $n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
En déduire la convergence de la suite  $u$  et donner sa limite.

**Exercice 7**

Soit la suite vérifiant  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$  avec  $u_0 > 0$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$ .  
On introduit la suite auxiliaire  $t$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \ln u_n$ .
2. Justifier que la suite  $t$  est arithmético-géométrique.
3. En déduire l'expression de  $t_n$  en fonction de  $n, t_0$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n, u_0$ .  
En déduire la convergence de la suite  $u$  et donner sa limite.

**Exercice 8**

Soit  $u$  la suite vérifiant la relation  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$  avec  $u_0 > 0$  et  $u_1 > 0$ .

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$   
(on posera comme hypothèse de récurrence " $u_n > 0$  et  $u_{n+1} > 0$ ").  
On considère alors la suite  $w$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \ln u_n$ .
2. Montrer que la suite  $w$  est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
3. Expliciter  $w_n$  en fonction de  $n, w_1, w_0$  et en déduire sa limite en  $+\infty$ .
4. Calculer alors la limite de  $u$  en  $+\infty$  en fonction de  $u_0, u_1$ .