

Exercice 1

Montrer que $\forall n \geq 0$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Montrer que $\forall n \geq 1$, $J^n = 6^{n-1}J$ où $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^2 , Q^2 , PQ , QP . Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n P + b^n Q$

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.

3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Exercice 5

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(4, 6, 8)$$

1. Vérifier que $A = P \text{diag}(4, 6, 8)Q$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \text{diag}(4^n, 6^n, 8^n)Q$ puis expliciter A^n .

Exercice 6

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -3 \\ -4 & 12 & 2 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A = PDQ$ puis montrer que $A^n = PD^nQ$ et donner les 9 coefficients de A^n

Exercice 7

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \\ -7 & -7 & -11 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ -1 & -8 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 16 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ , QP et vérifier que $A = \frac{1}{8}PTQ$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = 8^{n-1}PT^nQ$ et donner tous les coefficients de A^n .

Exercice 8

On donne la matrice suivante: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $A^n = \left(\frac{1}{3} - a_n\right)A + \left(\frac{2}{3} + a_n\right)I_3$

3. Vérifier que la suite a est géométrique.

4. En déduire les expressions de a_n puis de A^n en fonction de n .

Exercice 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 . Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta I$
2. Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels $A^n = a_n A + b_n I$
3. Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n . Que vaut a_0 , b_0 , a_1 et b_1 ?
4. Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n .
5. En déduire l'expression de b_n et déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

Exercice 10

On considère la matrice A suivante :
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = 6A - A^2$
2. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A^2 + b_n A$
Donner a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3 .
3. Montrer que a est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter a_n en fonction de n .
4. En déduire l'expression de b_n et déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

Exercice 11

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = B + 2I$

1. Calculer B^2 puis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n I + n2^{n-1} B$.
2. Retrouver la formule précédente à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 12

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel a tel que $A = aI + B$. Calculer B^2 et B^3 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a^n I + na^{n-1} B + \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2} B^2$
3. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver la valeur de A^n .

Exercice 13

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ où p et q sont deux réels.

1. Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = I \\ B + (1-p-q)C = A \end{cases}$
2. Calculer BC et CB et vérifier que $B^2 = B$, $C^2 = C$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = B + (1-p-q)^n C$.
4. A l'aide de la formule du binôme de Newton, retrouver la valeur de A^n .

Exercice 14

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \text{diag}(-1, 3, 1)$$

1. Vérifier que $A = \frac{1}{2}PDQ$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{1}{2}PD^nQ$ et expliciter A^n .
2. On considère trois suites a, b et c telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n - 2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + c_n \\ c_{n+1} = a_n - b_n + 2c_n \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = -2 \end{cases}$$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

- (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
- (b) En déduire l'expression des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$ en fonction de n .

Exercice 15

On considère trois suites a, b et c définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n - 5b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = -a_n + 7b_n - 4c_n \\ c_{n+1} = 2a_n - 5b_n + 5c_n \end{cases}$

On introduit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ ainsi que les matrices

$$P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & -8 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(2, 3, 12)$$

1. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$ puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$
2. Vérifier que $A = PDQ$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nQ$
3. En déduire les coefficients de A^n puis l'expression des suites a, b et c en fonction de n et des conditions initiales a_0, b_0, c_0 .