Exercice 1
On considère les matrices suivantes A. Vérifier que l'on a bien l'égalité demandée et en déduire, si cela est possible, l'inversibilité de A. Donner alors son inverse.

a) $A=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$ $A^2=9I$ b) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-5&6\\3&-3&4\end{pmatrix}$ $A^2+A-2I=0$

c) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ $A^3-A^2-2A+4I=0$ d) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$ $A^2-2A=0$

e) $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$ $A^2-2A-3I=0$ f) $A=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{10}(\mathbb{R})$ $A^2=10A$

Exercice 2
On considère la matrice $J=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\-2&1&2&-1\\2&-1&-1&0\\3&-2&-2&0\end{pmatrix}$

1. Calculer J^2, J^3 et J^4. Que peut-on en déduire de J^k pour $k\geqslant 4$?
2. Développer algébriquement l'expression $(I+J)(I-J+J^2-J^3)$.
3. En déduire que la matrice $(I+J)$ est inversible et expliciter son inverse.

Exercice 3
Pour tout réel a, on définit la matrice $N(a)$ par $N(a)=\begin{pmatrix}a+1&-a&-a\\a&-a+1&-a\\0&0&1\end{pmatrix}$

1. Soient a et b deux réels. Déterminer le réel c tel que $N(a)N(b)=N(c)$.
2. A quelle condition sur c a-t-on $N(c)=I_3$?
3. En déduire les conditions sur a pour que $N(a)$ soit inversible et expliciter le cas échéant $[N(a)]^{-1}$

Exercice 4
Soit $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3=0_3$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on définit la matrice $E(t)$ par $E(t)=I+tA+\dfrac{t^2}{2}A^2$

1. Montrer que : $\forall\,(t,t')\in\mathbb{R}^2,\quad E(t)\,E(t')=E(t+t')$
2. Calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.
3. Exprimer $E(2t)$, $E(3t)$, $E(4t)$, $E(5t)$ en fonction de $E(t)$. Quelle formule peut-on conjecturer ? Démontrer cette formule.
En déduire l'expression de $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

Exercice 5
Les systèmes suivant ont-ils des solutions. Si oui, expliciter les.

1) $\begin{cases}2x+y+z=-5\\2x+13y-7z=-1\\x-y+z=1\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x+2y+2z=1\\4x-y+3z=-1\\2x+5y+z=1\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2x+y=2\\x+2y=1\\x+y=1\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+3y-z+t=1\\2x+13y-7z+2t=2\\x-y+z+t=0\\x+7y-4z+t=-1\end{cases}$ 5) $\begin{cases}y+z+t=-1\\x+z+t=0\\x+y+t=1\\x+y+z=2\end{cases}$ 6) $\begin{cases}2x+y+z+t=-5\\2x+3y-3z+t=-1\\x-y+z-t=1\end{cases}$

7) $\begin{cases}u+w=1\\v+w=0\\u+v=12\\u+3v=0\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x+y-t=1\\-x+y+z=0\\-y+z+t=0\\x-z+t=1\end{cases}$ 9) $\begin{cases}x+y+z-3t=1\\-3x+y+z+t=-1\\x-3y+z+t=-1\\x+y-3z+t=1\end{cases}$

Exercice 6
Déterminer toutes les matrices $B\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}B=B\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

Exercice 7
Résoudre par rapport à x,y,z le système (S) : $\begin{cases}x-y+z=a\\x+2y+z=b\\x+y+2z=c\end{cases}$

En déduire que la matrice $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 8
Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse, par la méthode des opérations élémentaires sur les matrices puis par les systèmes

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&-2&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}4&2&1\\-1&1&-1\\-2&-2&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&0&1&-1\\1&-1&1&0\\1&-1&1&0\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\-1&1&0&1\\-1&0&1&1\\0&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

Exercice 9
Résoudre les systèmes suivants en X

1. Soit $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, i.e. $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 3X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\}$)

   puis $AX = -3X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} -b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{R}\}$)

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = -2X$ (($S = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2c \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\}$)

   puis $AX = X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} b-c \\ b \\ c \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{R}\}$)

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 0_{3,1}$ ($S = \{ \begin{pmatrix} c \\ -c \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\}$)

   puis $AX = 2X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} b \\ b \\ c \end{pmatrix}, b, c \in \mathbb{R}\}$)

2. Soit $X \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, i.e. $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 3X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} d \\ d \\ d \\ d \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}\}$)

   puis $AX = -X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} -b-c-d \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, b, c, d \in \mathbb{R}\}$)

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = 0_{4,1}$ ($S = \{ \begin{pmatrix} b \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}\}$)

   puis $AX = X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \\ d \end{pmatrix}, d \in \mathbb{R}\}$)

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX = X$ ($S = \{ \begin{pmatrix} d \\ -c \\ c \\ d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R}\}$)

Exercice 10
Pour chaque matrice A des questions 1 et 2 de l'exercice 9, déterminer tous les réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.
Par exemple, pour la question 1.a), pour quelles valeurs de λ la matrice

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.
Réponses :

1.a)	1.b)	1.c)
$\lambda \in \{3, -3\}$	$\lambda \in \{-2, 1\}$	$\lambda \in \{0, 2\}$
2.a)	2.b)	2.c)
$\lambda \in \{3, -1\}$	$\lambda \in \{0, 1\}$	$\lambda \in \{1\}$