Exercice 1
On pose pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \geqslant 0$ et donner la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$
2. Etablir, pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
3. Déduire des questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ puis, avec la question 2, donner l'équivalent de I_n.

Exercice 2
On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{(n+1)!}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad I_n = I_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad I_n = e - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

Exercice 3
$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$, on note $I_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t^2}dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2)dt$.

1. Donner la monotonie des suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$.
4. En déduire la limite de (J_n) et celle de nJ_n puis donner un équivalent J_n.

Exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $J_n = \int_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \dfrac{1}{n+1} J_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 5
m et n étant deux entiers naturels quelconques, on pose $I_{m,n} = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$.

1. Montrer que pour $m \geqslant 1$, on a : $I_{m,n} = \dfrac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$.
2. Exprimer $I_{m,n}$ en fonction de $I_{0,m+n}$, de n et de m.
3. Calculer $I_{0,m+n}$ et en déduire la valeur de $I_{m,n}$.

Exercice 6
On considère la suite $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{1}{k+x+1}$

1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1] \quad \dfrac{1}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + (-1)^{n+1} \dfrac{t^{n+1}}{1+t}$.
2. En déduire que $\int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t}dt = S_n(x) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \dfrac{t^{n+x+1}}{1+t}dt$.
3. Démonter que $0 \leqslant \int_0^1 \dfrac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \leqslant \dfrac{1}{n+2}$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t}dt$.

Exercice 7
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge vers 0
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Calculer I_0 puis I_1.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad (-1)^n I_n = \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$.
4. En déduire la convergence de la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}\right)_n$ et donner sa limite.