Exercice 1
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

1. On suppose dans cette question que les tirages sont sans remise.
   Déterminer la loi de B (resp. N) puis calculer $E(B), V(B)$ (resp. $E(N), V(N)$).
   Les variables B et N sont-elles indépendantes ?
2. Refaire les questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 2
Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce obtenir la première boule blanche. Soit B le nombre de tirages nécessaires.
   Expliciter la loi de B, son espérance et son écart-type.
2. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires.
   Expliciter la loi de X, son espérance et son écart-type.

Exercice 3
On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'a ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la var "nombre de tirage effectués".
Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 4
On considère une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules noires et 5 boules jaunes. On pioche successivement et avec remise six boules au maximum jusqu'à l'obtention de la première boule jaune. On note X la variable aléatoire égale au "nombre de tirage effectués". Par exemple, si l'on a obtenu la première boule jaune à la quatrième pioche alors $X = 4$, si l'on n'a pas obtenu de boule jaune à l'issue de la sixième pioche alors $X = 6$.
Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5
Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de Champagne. On fixe un entier $n \in [\![1, 25]\!]$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles découvertes.
Déterminer la loi de probabilité de X_n.

Exercice 6
On lance n fois consécutives une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est p et celle d'obtenir "face" est $q = 1 - p$.
Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

1. Donner la loi de X_2.
2. Donner la loi de X_3. Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
3. Trouver la loi de X_4. Calculer $E(X_4)$.

Exercice 7
On tire, avec remise, cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotés de 1 à 10. On note X la var égale au maximum des deux numéros obtenus et Y la var égale au minimum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer soigneusement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer $P(X \leqslant k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $P(Y \geqslant k)$ pour $k \in Y(\Omega)$.
   En déduire les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8
On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10. Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1. Donner $N(\Omega)$ et calculer $\forall k \in N(\Omega), \quad P(N \geqslant k+1)$.
2. En déduire la loi de N ainsi que son espérance.

Exercice 9
On tire simultanément r jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($r \leqslant n$). On note $X_{n,r}$ la var égale au maximum des r numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de $X_{n,r}$ pour n et r quelconques avec $1 \leqslant r \leqslant n$.
2. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$.
3. Vérifier que $r\binom{k}{r} = k\binom{k-1}{r-1}$. En déduire l'espérance de $X_{n,r}$