Exercice 1
Une urne contient dix boules rouges et cinq boules vertes.

1. On pioche simultanément six boules.On note R (resp. V) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues.
   Déterminer la loi, l'espérance et la variance de R (resp. V). Les variables R et V sont-elles indépendantes ?
2. Refaire la question lorsque l'on pioche avec remise.
3. On pioche les boules sans remise. On note X_R le nombre de pioches nécessaires pour obtenir la première boule rouge. Donner la loi de X_R.

Exercice 2
Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = 1/4$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi. Définir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés.
   Définir la loi de M. La donner explicitement. Calculer $E(M)$.

Exercice 3
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement n boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3. Soit X_n le nombre de boules blanches et Y_n le nombre de points obtenus.
Déterminer la loi de X_n, puis $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire la loi de Y_n, puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

Exercice 4
Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \ldots, n$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts
Donner la loi de Y_n, $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
Exprimer X_n en fonction de Y_n et n. En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$ puis la loi de X_n.

Exercice 5
Un dé D comporte 20 faces marquées dont 7 faces sont numérotées 1, 8 faces sont numérotées 2, 5 faces sont numérotées 3.
Soit n un entier non nul. On lance n fois le dé D et on note $X_n^{(i)}$ le nombre de faces numérotées i au cours des n lancers.

1. Donner la loi de $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$, $X_n^{(3)}$ ainsi que leurs espérances et leurs variances.
2. Lors des n lancers, pour chaque face numéro 1 (resp. 2, 3) obtenue on gagne 1 euro (resp. -2 euros, resp. a euros). Pour quelle valeur de a, le gain moyen du jeu est positif en moyenne ?.

Exercice 6
On considère une pièce telle que $P(Pile) = p \in]0, 1[$. On lance n fois cette pièce. On note T_n le nombre de pioches nécessaires pour obtenir le premier Pile. On convient que $T_n = n + 1$ si et seulement si on n'a pas obtenu de Pile durant les n premièrs lancers.

1. Donner la loi de T_n ainsi que son espérance $E(T_n)$.
2. En dérivant $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$. En déduire une autre expression de $E(T_n)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(T_n)$. Interprétation.

Exercice 7
Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0, 1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Calculer $p_0 = P(Z = 0)$, $p_1 = P(Z = 1)$. Montrer que $p_1 = npq^{2n-2}(1 + q)$.
   (c) Calculer $P_{(X=k)}(Y = h)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $h \in [\![0, n - k]\!]$.
   (d) Démontrer $P(Z = s) = \sum\limits_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k))$.
   (e) Calculer $P(Z = s)$, vérifier que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} = \binom{n}{s}\binom{s}{k}$.
   En déduire que $P(Z = s) = C_n^s[p(1 + q)]^s(q^2)^{n-s}$
   (f) Montrer que $p(1 + q) = 1 - q^2$ et reconnaitre la loi suivie par Z