Exercice 1
Soit la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n+1}$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{2x}{3x+1}$.

1. (a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que $\forall x \geqslant \dfrac{1}{3}, \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$
   (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$ ainsi que ses points fixes.
   (c) Montrer que $[0, 1/3]$ et $[1/3, +\infty[$ sont des intervalles stables par f.
2. On suppose dans cette question $u_0 \in [0, 1/3]$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1/3$ puis étudier la monotonie de la suite u.
   (b) En déduire sa convergence ainsi que sa limite.
3. On suppose dans cette question $u_0 \in [1/3, +\infty[$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1/3$ puis étudier la monotonie de la suite u.
   (b) En déduire sa convergence ainsi que sa limite.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1/3| \leqslant \dfrac{1}{2} |u_n - 1/3|$
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1/3| \leqslant \dfrac{1}{2^n} |u_0 - 1/3|$.
   (e) On suppose $u_0 = 5$. Comment choisir n pour être sûr que $\left| u_n - \dfrac{1}{3} \right| \leqslant 10^{-4}$?

Exercice 2
Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. On pose $f(x) = \sqrt{x+1}$.

1. (a) Montrer que $[0, 2]$ est stable par f et que $\forall x \in [0, 2], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$
   (b) Déterminer les points fixes de f. On note r l'unique point fixe tel que $r \in [0, 2]$.
2. (a) Montrer que $\forall\ n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ainsi qu'un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.
   (d) A l'aide d'un tableur, donner une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

Exercice 3
Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3 + u_n^2)$. On pose $f : x \mapsto \dfrac{1}{5}(3 + x^2)$.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, 1]$ et montrer que $[0, 1]$ est un intervalle stable par f.
   (b) Déterminer l'unique point fixe $r \in [0, 1]$ de f.
   (c) Montrer que $\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{2}{5}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \in [0, 1]$.
   (b) Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{2}{5} |u_n - r|$ puis $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (c) Expliciter un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - r| \leqslant 10^{-10}$.
   (d) En déduire une valeur approchée à 10^{-10} près de r.

Exercice 4
Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$.
On pose $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{4}(2 - x^2)$.

1. (a) Etudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
   (b) Montrer que $\forall x \in [1, 2], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et que $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et conclure.
   (d) A partir de quel rang a-t-on : $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$?
   (e) A l'aide d'un tableur, donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près.

Exercice 5
Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$ et u la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^\times$, déterminer le signe de $f(x) - x$, les points fixes de f puis montrer que $f([\sqrt{3}, +\infty[) = [\sqrt{3}, +\infty[$.
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{3}$ puis déterminer la monotonie de la suite u.
   En déduire sa convergence et calculer sa limite.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{3}\right|$ puis que $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
4. Retrouver ainsi la convergence de la suite u et donner sa limite.
5. Comment choisir n pour que $\left|u_n - \sqrt{3}\right| \leqslant 10^{-9}$?
   En déduire, à l'aide d'un tableur, une valeur approchée à 10^{-9} près de $\sqrt{3}$.

Plus difficile

Exercice 6

Soit u la suite définie par $u_0 \in [3;4]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \frac{\ln u_n}{4}$. On pose $f(x) = 4 - \frac{\ln x}{4}$.

Données numériques : $f(4) \simeq 3.65 \pm 10^{-2}$ et $f(3) \simeq 3.72 \pm 10^{-2}$

1. (a) Etudier la fonction f et montrer que l'intervalle $[3;4]$ est stable par f.
   (b) Montrer que f possède un unique point fixe L sur l'intervalle $[3;4]$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in [3;4], \quad | f'(x) | \leqslant \frac{1}{10}$.
2. (a) Vérifier que $\forall n \geqslant 0, \quad |u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{10}|u_n - L|$ puis que $|u_n - L| \leqslant \frac{1}{10^n}$.
   (b) Que peut-on dire de la convergence de la suite u ?
   (c) En choisissant $u_0 = 3$, déterminer le plus petit entier n tel que $| u_n - L | \leqslant 10^{-9}$.
   (d) A l'aide d'un tableur, donner une valeur approchée de L à 10^{-9} près (avec $u_0 = 3$).

Exercice 7

1. Montrer que l'équation $(E) : e^x = 3 + 2x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Justifier que $-2 \leqslant \alpha \leqslant -1$ puis que α vérifie également $\alpha = \frac{e^\alpha - 3}{2}$
2. On considère la suite u définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n} - 3}{2}$ ainsi que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 3}{2}$.
   (a) Justifier que $f(]-\infty, 0]) \subset]-\infty, 0]$ et que $\forall x \in]-\infty, 0], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 0$.
   (c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$.
   (d) En déduire que la suite u converge vers α.
   (e) Comment choisir n pour que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-9}$?
   A l'aide d'un tableur, donner une valeur approchée à 10^{-9} près de α.

Exercice 8

1. Montrer que l'équation $x = 2 - 2e^{-x}$ admet une unique solution $r > 0$. Vérifier que l'on a : $1 \leqslant r \leqslant 2$.
2. On considère la suite u définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n}$
   On introduit également la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - 2e^{-x}$
   (a) Justifier que $[1, r]$ est stable par f et déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $[1, r]$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [1, r]$ et donner la monotonie de u.
   (c) Justifier que la suite u converge vers r
3. (a) A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que l'on a :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - r|$ puis que $|u_n - r| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$
   (b) Comment choisir n pour que $|u_n - r| \leqslant 10^{-9}$?
   A l'aide d'un tableur, donner une valeur approchée à 10^{-9} près de r.

Exercice 9

On souhaite déterminer le nombre de solutions à l'équation $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi qu'une valeur approchée d'une des racines.

1. Montrer que l'équation (E) admet trois solutions réelles α, β et γ telles que $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$
2. Obtention d'approximation de β.
   (a) Justifier que $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ et montrer que β est aussi solution de l'équation $\frac{x^3 + 1}{3} = x$
   (b) On introduit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$.
   Montrer que l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par g et que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \quad |g'(x)| \leqslant \frac{1}{4}$.
   On considère alors la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, \frac{1}{2}]$
   (d) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \beta|$ puis que $|u_n - \beta| \leqslant \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$.
   (e) Pour quelles valeurs de n est-on certain que $|u_n - \beta| \leqslant 10^{-9}$?
   En déduire une valeur approchée à 10^{-9} près de β.