EXERCICE 1 (Extrait EM Lyon 1987)

On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x+10}$.

1. (a) Calculer f'. Etudier les variations de la fonction f.
   (b) Calculer f''. Démontrer que, $\forall x\in[0,1]\quad 0,09\leqslant f'(x)\leqslant 0,225$.
   Données numériques : $0.224\leqslant \dfrac{10e}{121}\leqslant 0.225$.
   (c) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique dans $[0,1]$, qui sera notée α.
   Données numériques $\dfrac{e}{11}\simeq 0.25\pm 10^{-2}$
   (d) Montrer que $f(x)-x\geqslant 0$ sur $[0,\alpha]$
2. On considère la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant u_n\leqslant\alpha$.
   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n\geqslant 0$.
   (c) Justifier que la suite u converge vers α.
   (d) Etablir que, pour $n\in\mathbb{N},\quad |u_{n+1}-\alpha|\leqslant 0.225\,|u_n-\alpha|$.
   (e) Comment choisir n pour que $|u_n-\alpha|\leqslant 10^{-3}$?
   Données numériques : $\dfrac{-3\ln 10}{\ln(0.225)}\simeq 4.63\pm 10^{-2}$.

EXERCICE 2 (extrait ESCP 1994)

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{1}{6}\left(x^3-3x^2+2x+8\right)$$

ainsi que l'application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=x^3-3x^2-4x+8$$

On donne également les approximations numériques suivantes :

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{3}\sqrt{3} & \simeq & 0.58,\quad f(1-\frac{1}{3}\sqrt{3})\simeq 1.40,\quad f(1+\frac{1}{3}\sqrt{3})\simeq 1.27 \\ \frac{1}{3}\sqrt{21} & \simeq & 1.53,\quad g(1-\frac{1}{3}\sqrt{21})\simeq 9.13,\quad g(1+\frac{1}{3}\sqrt{21})\simeq -5.13 \end{array}$$

1. (a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$.
   (b) On note x_1,x_2,x_3 avec $x_1<x_2<x_3$ les trois racines de g. Justifier que que $1<x_2<2$.
2. (a) Montrer que $f(x_2)=x_2$.
   (b) Montrer que le segment $[1,2]$ est stable par f (c'est-à-dire que $f([1,2])\subset[1,2]$).
   (c) Donner un encadrement de $f'(x)$ lorsque $x\in[1,2]$.
   (d) Montrer que, pour tout x de $[1,2]$, $\quad |f(x)-f(x_2)|\leqslant\dfrac{1}{3}|x-x_2|$.
3. Soit $u_0=1$ et pour tout entier $n\geqslant 1, u_n=f(u_{n-1})$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers x_2.

EXERCICE 3 (EML 2001)

On considère l'application $f\ :]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, définie, pour tout x de $]0;+\infty[$, par : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$

1. (a) Calculer $f'(x)$
   (b) Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[,\quad f''(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x-2e^x+x+2)$
   (c) Etudier les variations de la fonction $g\ :[0;+\infty[\to\mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0;+\infty[$, par:
   $$g(x)=xe^x-2e^x+x+2$$
   En déduire : $\quad\forall x\in]0;+\infty[,\quad f''(x)>0$.
   (d) En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x)\underset{x\to 0^+}{\to}-\dfrac{1}{2}$).
   On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0=0$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n)$.
   (a) Montrer : $\forall x\in]0;+\infty[,\quad |f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}\quad$ et $\quad 0\leqslant f(x)\leqslant 1$
   (b) Résoudre l'équation $f(x)=x$, d'inconnue $x\in]0;+\infty[$.
   (c) Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}\quad |u_{n+1}-\ln 2|\leqslant\dfrac{1}{2}|u_n-\ln 2|$
   (d) Etablir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.