Exercice 1
Sur quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles C^∞ ?

$a(x) = \ln(1+x^2)$ $\quad b(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2-1}$ $\quad c(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$ $\quad d(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

$e(x) = \exp(x+1/x)$ $\quad f(x) = \sqrt{1-4x^2}$ $\quad g(x) = \ln(2x^2-x-1)$ $\quad h(x) = (1+x^2)^x$

Exercice 2
Déterminer les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

$$a(x) = e^{-x}\frac{x}{1+x} \qquad b(x) = \frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x} \qquad c(x) = \frac{e^{4x}-1}{x}$$
$$d(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \qquad e(x) = \frac{x\ln(1+x)-\exp(x^2)+1}{x^2} \qquad f(x) = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$$

Exercice 3
Donner un équivalent en x_0 des expressions suivantes

$x_0 = 0$, $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\qquad x_0 = 0$, $\sqrt{1+4x^2}-\sqrt[3]{1+3x}$ $\qquad x_0 = 0$, $\ln\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}\right)$

$x_0 = +\infty$, $\ln(1+e^{-x})$ $\qquad x_0 = +\infty$, $x(e^{1/x^2}-1)$ $\qquad x_0 = +\infty$, $\dfrac{x\ln(1+1/x^2)}{x^2+1}$

$x_0 = 0$, $(\ln x)/x - 1/x^2$ $\qquad x_0 = 0$, $e^{-1/x^2}-1/x$ $\qquad x_0 = 0$, $e^{1/x^2}-1/x$

$x_0 = +\infty$, $\dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$ $\qquad x_0 = +\infty$, $\ln(e^x+e^{-x})$ $\qquad x_0 = -\infty$, $\ln(e^x+e^{-x})$

Exercice 4
Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{xe^x-e^x+1} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)-e^x}{1-\exp(1/x)}$$

Exercice 5
On considère la fonction $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}^\times$ et expliciter sa dérivée sur $\mathbb{R}^\times$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer $f'(x)$ lorsque $x \neq 0$
3. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$. En déduire que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(0)$.

Exercice 7
Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur I. Quelles sont les fonctions qui sont C^1 sur I ? Expliciter la dérivée de chacune de ces fonctions sur son intervalle de dérivabilité

$I = \mathbb{R}_+$, $\quad a(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ $\qquad I = \mathbb{R}_+$, $\quad b(x) = \ln(1+\sqrt{x})$

$I = \mathbb{R}_+$, $\quad c(x) = \begin{cases} x^2\ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\qquad I = \mathbb{R}_+$, $\quad d(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$I = \mathbb{R}_+$, $\quad e(x) = \begin{cases} \exp(x\ln x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\qquad I =]-\infty, 1]$, $\quad f(x) = x\sqrt{1-x}$

$I = [-1, 1]$, $\quad g(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$ $\qquad I = \mathbb{R}$, $\quad h(x) = \ln(e^{2x}-2e^x+3)$

$I =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$, $\quad i(x) = x\sqrt{x+x^2}$ $\qquad I = \mathbb{R}_+$, $\quad j(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$I = \mathbb{R}$, $\quad k(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\qquad I = \mathbb{R}_+$, $\quad l(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 8
Déterminer les asymptotes des fonctions suivantes en x_0 puis déterminer la position relative de l'asymptote.

$x_0 = +\infty$, $\sqrt{1+x+x^2}$ $\qquad x_0 = -\infty$, $\sqrt{1+x+x^2}$ $\qquad x_0 = +\infty$, $xe^x\ln(1+e^{-x})$

$x_0 = -\infty$, $\sqrt{e^{2x}+x^2+1}$ $\qquad x_0 = +\infty$, $x^2(e^{1/x}-1)$ $\qquad x_0 = +\infty$, $x^3\ln(1+1/x^2)$

$x_0 = +\infty$, $\ln(e^x+x)$ $\qquad x_0 = +\infty$, $x/(e^x-1)$ $\qquad x_0 = -\infty$, $x/(e^x-1)$

$x_0 = +\infty$, $\ln(1+x^2)$ $\qquad x_0 = +\infty$, $\ln(1+xe^x)$ $\qquad x_0 = +\infty$, $\ln(1+xe^{-x})$