Exercice 1
Convergence d'une série par calcul explicite des sommes partielles.

1. On considère la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$

   (a) Donner la définition de sa N^{e} somme partielle S_N.

   (b) Vérifier que $\forall N \in \mathbb{N}^{\times}, \quad S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$.

   (c) En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

2. Mêmes questions avec la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$

   Indication : *On vérifiera que*

   $$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

   puis que

   $$S_N = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right)$$

Exercice 2
Convergence d'une série par théorème de monotonie sur les sommes partielles.

1. On considère la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

   On note T_N la N^{e} somme partielle de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

   (a) Vérifier que $\forall n \geqslant 2, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

   (b) En déduire que $\forall N \geqslant 2, \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leqslant T_N \leqslant 2 - \frac{1}{N}$.

   (c) A l'aide de la question 1.b), montrer que la suite (T_N) est majorée.

   (d) Déterminer la monotonie de la suite $(T_N)_{N \geqslant 2}$.

   (e) En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$

   (f) En utilisant la question 1.b), vérifier que l'encadrement suivant

   $$\frac{3}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2.$$

2. On considère la série numérique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$.

   On note U_N la N^{e} somme partielle de cette série et on pose

   $$V_N = U_N - \ln(N+1)$$

   (a) En admettant que

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) - \ln x \leqslant \frac{1}{x},$$

   déterminer la monotonie de la suite $(V_N)_{N \geqslant 1}$.

   (b) Que vaut V_1 ? En déduire $\forall N \geqslant 1, \quad U_N \geqslant \ln(N+1)$.

   (c) Calculer $\lim_{N \to +\infty} U_N$. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ est-elle convergente ?

Exercice 3
Convergence d'une série par théorème de monotonie sur les sommes partielles.

1. On considère la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n+e^{-n}}$.

   On note S_N la N^{e} somme partielle de cette série.

   (a) Déterminer la monotonie de la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$.

   (b) Justifier que $\forall n \geqslant 0, \quad \frac{1}{e^n+e^{-n}} \leqslant e^{-n}$.

   (c) En déduire que $\forall N \geqslant 0, \quad S_N \leqslant \frac{1-e^{-(N+1)}}{1-e^{-1}}$.

   (d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{e^n+e^{-n}}$ converge et que

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{e^n+e^{-n}} \leqslant \frac{e}{e-1}.$$

2. On considère la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   On note T_N la N^{e} somme partielle de cette série.

   (a) En admettant que

   $$\forall n \geqslant 1, \quad 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right),$$

   montrer que

   $$\forall N \geqslant 1, \quad 2\left(\sqrt{N+1}-1\right) \leqslant T_N \leqslant 2\sqrt{N}.$$

   (b) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est-elle convergente ?

Exercice 4
Convergence et calcul de la somme d'une série à l'aide du calcul intégral.

On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ ainsi que $I_n = \int\limits_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

On note S_N la N^{e} somme partielle de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
3. Montrer que $\forall N \geqslant 0, \quad S_N = I_0 - (-1)^{N+1} I_{N+1}$.
4. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et que

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2.$$

Exercice 5
Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes

$a)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{5^n}$, $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$, $c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+5n}{5^n}$, $d)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$,

$e)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$, $f)$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{3^n}$ $g)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

$h)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n!}$, $i)$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n2^n}{n!}$, $j)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$