Exercice 1
Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p \in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche. Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.

Exercice 2
On considère deux variables X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^\times$ et
$\forall i, j \in \mathbb{N}^\times, \quad P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$.

1. Donner les lois de X et de Y.
2. Montrer que X et Y admettent des espérances et expliciter $E(X)$ et $E(Y)$.
3. Justifier que la variable $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer. En déduire $V(X)$. Procéder de même avec Y.
4. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, montrer que X et Y sont dépendantes (utiliser $P(X = 1 \cap Y = 1)$)
5. Montrer que X et Y sont indépendantes lorsque $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne "pile" est a, et que la probabilité que la pièce B donne "pile" est b.
Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne "face" pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce B donne "face" pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilités de X et de Y ? Calculer $E(X)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = Y)$. Interprétation.
3. Trouver, pour $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $P(X > k)$. En déduire les probabilités $P(X > Y)$ et $P(X \geqslant Y)$. Interprétation.

Exercice 4
Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet $n^\circ 1$.

1. Calculer $P_{(N=n)}(X = k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Justifier que $P(X = k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} P_{(N=n)}(X = k)\, P(N = n)$
3. Montrer que $P(X = k) = e^{-\lambda}(\dfrac{1}{m})^k \dfrac{\lambda^k}{k!} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}\left(\lambda\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)\right)^n$.
4. En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle)
5. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 5
On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à t.
On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :
N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés; X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés; Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état. On a donc : $X + Y = N$.

1. Calculer, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X = k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.
3. En suivant une méthode similaire à X, déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles, à priori et sans calcul, indépendantes ?
5. Calculer la probabilité $P((X = k) \cap (Y = q))$ et $P(X = k)P(Y = q)$. Conclusion