Exercice 1
On admet que l'égalité $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est valable pour $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.
Soit p un nombre réel tel que $0 < p < 2/3$. Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est de $p^n/2$ quand $n \geqslant 1$; par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance, d'avoir un garçon est de $1/2$.

1. Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant.
   Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^{\times}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On considère une famille de n enfants ;
   calculer la probabilité pour que cette famille ait exactement k garçons.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^{\times}$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.
4. Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

Exercice 2
On considère une pièce telle que la probabilité d'obtenir "pile" est $p \in]0,1[\backslash\{1/2\}$.
On lance indéfiniment la pièce et on note T la variable égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, la séquence PF.

1. Calculer les probabilités $P(T=2)$, $P(T=3)$ et $P(T=4)$.
2. Justifier que $\forall n \geqslant 2, \quad P(T=n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} q^{k+1}p^{n-k-1}$.
   En déduire que $\forall n \geqslant 2, \quad P(T=n) = pq\dfrac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}$
3. Justifier que T admet une espérance et la calculer.

Exercice 3
On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée dont la probabilité d'obtenir "pile" vaut p et celle de "face" vaut q $(p+q=1)$. On lance indéfiniment la pièce et on note X le rang où apparait pour la première fois deux résultats " pile " consécutifs.

1. Calculer en fonction de p et q : $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$, $P(X=4)$
2. Montrer que
   $$\forall n \geqslant 3, \quad P_{(P_1)}(X=n) = qP(X=n-2) \quad \text{et} \quad P_{(F_1)}(X=n) = P(X=n-1)$$
3. En déduire que $\forall n \geqslant 3, \quad P(X=n) = qP(X=n-1) + pqP(X=n-2)$
4. On suppose à présent que $p = 2/3$ et $q = 1/3$.
   (a) Etablir que $\forall n \geqslant 0, \quad P(X=n+1) = \dfrac{4}{9}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$
   (b) Calculer $E(X)$, $E(X(X-1))$ et $V(X)$

Exercice 4
On considère une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la premiére fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P_{(P_1)}(X=k)$ et justifier que $P_{(F_1)}(X=k) = P(X=k-1)$.
2. En déduire que $\forall k \geqslant 3 \qquad P(X=k) = \dfrac{1}{2}P(X=k-1) + \dfrac{1}{2^k}$.
3. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^kP(X=k)$.
   Montrer que la suite $(u_k)_{k\geqslant 2}$ est arithmétique et donner la loi de X.
4. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.

Exercice 5
On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par piocher des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne).
  On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
  On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^{\times}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X=k)$.
3. Vérifier : $P(X=0) = \dfrac{4}{9}$.
   On admet que l'égalité $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est valable pour $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$.
   Montrer :$\forall k \in \mathbb{N}^{\times}, \quad P(X=k) = \dfrac{25}{36}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$.
4. Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.