Exercice 1
Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, justifier que la fonction est C^1 sur son domaine de définition et expliciter sa dérivée.

$$a : x \mapsto \int_1^x \ln t\, dt \quad b : x \mapsto \int_{-2}^x \frac{dt}{1-t^2} \quad c : x \mapsto \int_{-3}^x \sqrt{t^4-1}dt \quad d : x \mapsto \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3+1}}dt$$

$$e : x \mapsto \int_{-1}^x \frac{dt}{t^4+1} \quad f : x \mapsto \int_1^x \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt \quad g : x \mapsto \int_x^{-4} \sqrt{1+t^2}dt \quad h : x \mapsto \int_{1/2}^x \frac{dt}{t^2-t}.$$

Exercice 2
Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, le signe sur le domaine de définition et étudier la parité éventuelle

$$a : x \mapsto \int_0^x \frac{t}{e^t-e^{-t}}\, dt \quad b : x \mapsto \int_0^x \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}dt \quad c : x \mapsto \int_0^x |t|\, dt \quad d : x \mapsto \int_1^x |t|^3\, dt$$

$$e : x \mapsto \int_0^x \frac{\sqrt{t}dt}{t^4+1} \quad f : x \mapsto \int_1^x \exp\left(-t^2\right)dt \quad g : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1+t^2}dt \quad h : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1-t^4}$$

Exercice 3
On considère la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Justifier que F est C^1 sur $\mathbb{R}$, que F est impaire et donner le signe de F sur $\mathbb{R}$.
2. En justifiant que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{2}{(1+t)^2}$, montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad F(x) \leqslant 2$.
3. En déduire que la fonction F admet une limite L en $+\infty$ et que $L \leqslant 2$.
4. Montrer que $\forall x \geqslant 0, \quad F(x) \geqslant \int_0^x \frac{dt}{(1+t)^2}$ et en déduire que $L \geqslant 1$.
5. Démontrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.
6. Une identité remarquable. On pose $G(x) = F(x) + F(1/x)$.
   (a) Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et calculer G'. Que dire de G ?
   (b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

Exercice 4
On considère la fonction $F(x) = \int_2^x \frac{s^2}{s^2-1}ds$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_F$ et expliciter F'.
2. Etablir que $\forall s \geqslant 1, \quad \int_2^x s ds \leqslant F(x) \leqslant \int_2^x \left(s + \frac{1}{s-1}\right) ds.$
   En déduire les limites $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^2}$.

Exercice 5
On considère les fonctions $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ et $G(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$

1. Montrer que F est C^1 sur $\mathcal{D}_f$ et calculer F'.
2. Expliciter $\mathcal{D}_G$ puis exprimer $G(x)$ en fonction de $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Montrer que G est dérivable sur $\mathcal{D}_G$. Calculer G' et $G(1)$. En déduire G.

Exercice 6
On considère la fonction $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que : $\forall t \geqslant 0 \quad \frac{1}{t+1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant \frac{1}{t}$.
   Donner un encadrement de F et déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Etudier la dérivabilité de $G : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. Exprimer F à l'aide de G.
   En déduire que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$ et calculer F'.

Exercice 7
On considère la fonction numérique Φ définie par $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$.

1. Calculer $\mathcal{D}_\Phi$ et montrer que Φ est une fonction impaire
2. Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.
   En déduire la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Etudier la dérivabilité de $\Gamma : x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$. Exprimer Φ à l'aide de Γ.
4. Justifier la dérivabilité de Φ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Phi'(x)$.