Exercice 1
A l'aide de la caractérisation des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel, déterminer parmi les espaces suivants ceux qui sont des espaces vectoriels.

$A = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $a+b=1\}$.

$B = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{ \begin{array}{c} 2a-5b+c=0 \\ b+c=0 \end{array} \right. \}$

$C = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left\{ \begin{array}{c} \alpha+\gamma=-1 \\ 2\alpha-\beta+3\gamma=0 \end{array} \right. \}$

$D = \{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $a^2+b=0\}$. $E = \{\begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

$F = \{\begin{pmatrix} a \\ a-b \\ a+b \\ b \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. $G = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 3X\}$.

$H = \{X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = 4X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

$K = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = X\}$.

$L = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\}$, $M = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^3\}$.

$N = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$, $O = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$

$P = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\}$

$Q = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} M + M \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0_2\}$

Exercice 2
On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Parmi les vecteurs suivants, repérer ceux qui sont combinaison linéaire de e_1 et e_2 puis expliciter la combinaison linéaire correspondante.

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 3
On considère les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que tout vecteur X de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3.
2. Est-ce le cas si l'on considère seulement la famille e_1, e_2 ?
3. Est-ce le cas si l'on remplace e_3 par le vecteur $\widetilde{e_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$?
4. Est-ce le cas si l'on choisit la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

Exercice 4
Déterminer, parmi les familles suivantes, celles qui sont des bases de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 5
On considère l'ensemble $F = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} X = 2X\}$

1. Montrer que est un espace vectoriel (par la caractérisation des sous-espaces vectoriels puis par les espaces engendrés par une partie).
2. Donner une famille génératrice. Cette famille génératrice est-elle une base de F ?

Exercice 6
Refaire l'exercice 1 à l'aide des espaces engendrés par une partie uniquement pour les ensembles dont on a prouvé qu'ils étaient des espaces vectoriels, puis déterminer une base de chacun de ces espaces vectoriels.