Exercice 1

Par la méthode des espaces engendrés par une partie, une base de chacun des espaces vectoriels suivants

1. $A = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} 2a - 5b + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \}$
2. $B = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} \alpha + \gamma - 2\delta = 0 \\ \alpha + \beta + \delta = 0 \\ 2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \}$
3. $C = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ -2a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \}$.
4. $D = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = -X\}$
5. $E = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = 6X\}$
6. $F = \{X \in \mathfrak{M}_{3}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = 4X\}$
7. $G = \{X \in \mathfrak{M}_{2}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2X\}$

Exercice 2

Soient E, F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F.
Pour chacune des applications suivantes,

- justifier que f est linéaire.
- expliciter une matrice A telle que $\forall X \in E, \quad f(X) = AX$
- donner une base de $\ker(f)$, le noyau de f..

1. $E = F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$
2. $E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $F = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ avec $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y + z \end{pmatrix}$.
3. $E = \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $F = \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ avec $f : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a - 2b \\ 2a + b \\ a - b \\ b \end{pmatrix}$
4. $E = F = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 6z \\ 3x + y + 3z \\ 3x + 4z \end{pmatrix}$

Exercice 3

On considère deux matrices A et B telles que $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX - XB \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Expliciter une base de $\ker(f)$.
   (a) lorsque $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) lorsque $n = 2$ et $A = B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
   (c) lorsque $n = 3$ et $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (d) lorsque $n = 3$ et $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (e) lorsque $n = 3$ et $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (f) lorsque $n = 3$ et $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$