Exercice 1
ECRICOME 1995. Soit $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Les matrices A, $A - I_3$ et $A - 4I_3$ sont-elles inversibles ?
2. Montrer que $V_0 = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad / \quad A.X = 0_{3,1}\}$ est un espace vectoriel. Justifier que V_0 possède une base constituée d'un seul vecteur, que l'on notera e_1.
3. On admet que $V_1 = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad / \quad A.X = X\}$ et $V_2 = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad / \quad A.X = 4X\}$ sont des espaces vectoriels.
   Justifier que V_1 (resp. V_4) possède une base constituée d'un seul vecteur, que l'on notera e_2 (resp. e_3).
4. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
5. Si l'on note $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$.

Exercice 2
ECRICOME 2003.

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x - 2y + 3z \\ x + 2z \\ 2z \end{pmatrix} \end{array} \right.$

1. Justifier que f est une application linéaire et déterminer une matrice A telle que $\forall X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad f(X) = AX$.
2. Montrer que les ensembles $E_1 = \{x \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad / \quad f(x) = x\}$ et $E_2 = \{x \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad / \quad f(x) = 2x\}$ sont des espaces vectoriels.
3. Justifier que chacun de ces espaces possède une base constituée d'un unique vecteur, que l'on notera e_1 pour E_1 et e_2 pour E_2.
4. Déterminer un vecteur e_3 tel que $f(e_3) = 2e_3 + e_2$.
5. Justifier que la famille (e_3, e_2, e_1) est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
6. Si l'on note $e_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$

Exercice 3
ECRICOME 1991

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$. On considère l'application linéaire f : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$

1. Montrer que $V = \{X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \quad / \quad f(X) = X\}$ est un espace vectoriel. Justifier que V possède une base constituée d'un seul vecteur, que l'on notera e_1.
2. Déterminer un vecteur $e_2 \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(e_2) = e_2 + e_1$.
3. Déterminer un vecteur $e_3 \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(e_3) = e_3 + e_2$.
4. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
5. Si $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} h \\ i \\ j \end{pmatrix}$, on pose $P = \begin{pmatrix} a & e & h \\ b & f & i \\ c & g & j \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice P est inversible et donner son inverse P^{-1}.
   (b) Déterminer l'unique matrice T telle que $A = PTP^{-1}$.