Exercice 1
Dans un jeu, il y a n numéros (de 1 à n) dont p numéros gagnants choisis à l'avance et connus du seul meneur de jeu. On suppose $n \in \mathbb{N}^\times$, $p \in \mathbb{N}^\times$, $p \leqslant \dfrac{n}{3}$.
Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard, successivement, p numéros différents. Le meneur dévoile alors p numéros perdants parmi les $n-p$ numéros qui n'ont pas été tirés.
Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies.
Stratégie A : il garde les p numéros qu'il a tirés.
Stratégie B : il échange les p numéros qu'il a tirés contre p nouveaux numéros tirés au hasard, successivement, parmi les $n-2p$ numéros qui n'ont été ni tirés, ni dévoilés durant la première phase.
Le but de l'exercice est de déterminer laquelle des deux stratégies permet d'espérer obtenir le plus de numéros gagnants.

1. **Etude de la stratégie A** : On note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la première phase.
   Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.
   En déduire les formules (1) : $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k} = \binom{n}{p}$ (2) : $\sum_{k=0}^{p} k\binom{k}{p}\binom{n-p}{p-k} = \dfrac{p^2}{n}\binom{n}{p}$
2. **Etude de la stratégie B** :
   Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on note Z_i la variable aléatoire égale à 1 si le $i^{ième}$ numéro tiré dans la deuxième phase est gagnant, 0 sinon.
   On note Z la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la deuxième phase.
   (a) Soient $k \in [\![0,p]\!]$ et $i \in [\![1,p]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(X=k)}(Z_i = 1)$.
   (b) Pour $1 \leqslant i \leqslant p$ démontrer que : $P(Z_i = 1) = \dfrac{1}{(n-2p)\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} (p-k)\binom{k}{p}\binom{n-p}{p-k}$
   (c) Quelle est la relation liant Z et les variables $(Z_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$? En déduire que : $E(Z) = \dfrac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}$.
3. Des stratégies A et B, laquelle est préférable ?

Exercice 2
Cet exercice a pour but l'étude d'une marche aléatoire sur les sommets d'un triangle, ce qui fait l'objet de la partie II. Dans la partie I, on aborde des questions préliminaires d'algèbre linéaire.
Partie I.
On associe à tout triplet (x,y,z) de nombres réels la matrice $M(x,y,z)$ définie par : $M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$.
La matrice $M(1,0,0)$ n'est autre que la matrice identité I_3 et la matrice $M(0,1,0)$ est notée J.

1. L'espace vectoriel E des matrices $M(x,y,z)$.
   (a) Calculer les matrices J^2 et J^3.
   (b) Établir que l'ensemble E des matrices de la forme $M(x,y,z)$ où (x,y,z) décrit $\mathbb{R}^3$ constitue un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.
   (c) Établir que (I_3, J, J^2) forme une base de E.
2. Etude des matrices $M(x,y,y)$. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que P est inversible, calculer P^{-1} et vérifier que $P^{-1}M(x,y,y)P = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 0 \\ 0 & x-y & 0 \\ 0 & 0 & x-y \end{pmatrix}$.

(b) En déduire la relation suivante pour tout nombre entier naturel n :

$$[M(x,y,y)]^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n M(1,1,1) + \frac{1}{3}(x-y)^n M(2,-1,-1).$$

Partie II.
On désigne dans toute cette partie par p un nombre réel tel que $0 < p < 1/2$ et on considère la marche aléatoire d'un point S sur les sommets d'un triangle ABC.
A l'instant initial $t = 0$, le point S est en A, et il se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si S est à l'instant n au sommet A du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet B avec la probabilité p, au sommet C avec la probabilité p, ou encore au sommet A avec la probabilité $1-2p$.
- Si S est à l'instant n au sommet B du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet C avec la probabilité p, au sommet A avec la probabilité p, ou encore au sommet B avec la probabilité $1-2p$.
- Si S est à l'instant n au sommet C du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet A avec la probabilité p, au sommet B avec la probabilité p, ou encore au sommet C avec la probabilité $1-2p$.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne enfin par :

- A_n l'événement "le point S est au sommet A à l'instant n" et par a_n sa probabilité.
- B_n l'événement "le point S est au sommet B à l'instant n" et par b_n sa probabilité.
- C_n l'événement "le point S est au sommet C à l'instant n" et par c_n sa probabilité.

1. Calcul des probabilités a_n, b_n, c_n.
   (a) Exprimer à l'aide de la formule des probabilités totales les probabilités a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n, c_n.
   (b) En déduire une matrice M telle qu'on ait pour tout nombre entier naturel n : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$
   (c) Exprimer en fonction de p les probabilités a_n, b_n, c_n et leurs limites quand n tend vers $+\infty$.
2. Nombres moyens des passages en A, B, C entre les instants 1 et n.
   On désigne dans cette question par X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque S est au sommet A à l'instant n, et prenant la valeur 0 sinon.
   Interpréter la variable aléatoire $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et son espérance $m_n = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, puis établir que :
   $$m_n = \frac{1}{3}\left[n + 2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}\right].$$
   Donner un équivalent de m_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3
Un joueur lance une pièce équilibrée autant de fois que nécessaire . On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents (On peut appeler X_N le " nombre de changements " au cours des N premiers lancers).
Par exemple , si les 9 premiers lancers ont donné successivement : Pile , Pile , Face , Pile , Face , Face , Face , Pile , Pile alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux $3^{ième}$, $4^{ième}$, $5^{ième}$ et $8^{ième}$ lancers).

1. Déterminer la loi de X_1, X_2, X_3, X_4.
2. Justifier que $X_N(\Omega) = \{0, ..., N-1\}$.
3. Montrer que $P(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $P(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^N$.

4. (a) Justifier que pour tout entier k de $\{0,...,N-1\}$: $P_{(X_N=k)}(X_{N+1}=k)=\dfrac{1}{2}$
   (b) En déduire que pour tout entier k de $\{0,...,N-1\}$ $\quad P(X_{N+1}-X_N=0\cap X_N=k)=\dfrac{1}{2}P(X_N=k)$.
   (c) En sommant cette relation de $k=0$ à $N-1$, montrer que $P(X_{N+1}-X_N=0)=\dfrac{1}{2}$.
   (d) Que représente la variable $X_{N+1}-X_N$. En déduire que $X_{N+1}-X_N$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   En déduire la relation $E(X_{N+1})=\dfrac{1}{2}+E(X_N)$, puis donner $E(X_N)$ en fonction de N.

5. (a) Montrer grâce aux résultats 4(b) et 4(c) que les variables $X_{N+1}-X_N$ et X_N sont indépendantes.
   (b) En déduire par récurrence sur N que X_N suit une loi binômiale $B(N-1,\dfrac{1}{2})$.

Exercice 4
Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une blanche vaut $p\in]0,1[$. On effectue des tirages successifs avec remise.
Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 1-ère boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la 2-ième boule blanche.
   Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance.
3. Soit X_r la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la r-ième boule blanche ainsi que la variable aléatoire $Y_r=X_{r+1}-X_r$.
   (a) Que représente la variable Y_r ? En déduire sa loi et son espérance.
   (b) Montrer, par récurrence, que la variable X_r admet une espérance.
   (c) Justifier que la suite $(E(X_r))_{r\in\mathbb{N}^\times}$ est arithmétique. Expliciter alors $E(X_r)$ en fonction de r.
4. Détermination de la loi de X_r.
   (a) Donner l'univers de X_r. Pour $r\in\mathbb{N}^\times$ et $k\in\mathbb{N}$ avec $r\leqslant k$, calculer la probabilité $P(X_r=k)$.
   (**Indication** : *on obtient la r-ième boule blanche à la k-ième pioche et lors des $k-1$ pioches précédentes, on a obtenu $r-1$ boules blanches.*).
   (b) En explicitant $E(X_r)$, quelle formule remarquable vient-on de démontrer ?