Exercice 1

1. Pour chacune des matrices A suivantes, déterminer les réels λ tels que la matrice $A-\lambda I$ soit non inversible :
   a) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&4\\0&2&1\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$
   d) $A=\begin{pmatrix}3&4&-4\\-2&-1&2\\-2&0&1\end{pmatrix}$, e) $A=\begin{pmatrix}-2&5&7\\-1&6&9\\0&-2&-3\end{pmatrix}$

2. Pour chacune des matrices A de la question 1 et pour chacune des valeurs de λ suivantes, déterminer une base de l'espace vectoriel
   $E_\lambda=\{X\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\quad AX=\lambda X\}$.
   a) $\lambda\in\{-1,2,5\}$ b) $\lambda\in\{-1,0,3\}$ c) $\lambda\in\{0,2\}$
   d) $\lambda\in\{-1,1,3\}$ e) $\lambda\in\{-1,1\}$

3. Pour la matrice A du 1.e), déterminer un vecteur e_3 tel que $Ae_1=e_1+e_2$, où e_2 est un vecteur générateur de E_1.

Exercice 2

Soient A une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, λ un nombre réel et $X_0\in\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX_0=\lambda X_0$.

1. Justifier que $\forall n\in\mathbb{N},\quad A^nX_0=\lambda^nX_0$.

2. On suppose qu'il existe trois réels a,b,c tels que $A^3+aA^2+bA+cI_n=0_n$. Si X_0 est un vecteur non nul, justifier que $\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c=0$.

3. Applications :

   (a) Si $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2=2A$.
   Montrer que si λ un nombre réel et $X_0\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur non nul tel que $AX_0=\lambda X_0$ alors $\lambda^2=2\lambda$. En déduire les valeurs de λ.
   Déterminer des bases de $E_0=\{X\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ /\ AX=0_{3,1}\}$ et $E_1=\{X\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ /\ AX=2X\}$.
   On considère $P=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} et vérifer que $A=P\,\mathrm{diag}(0,2,2)P^{-1}$.

   (b) Soit $A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-2&0&2\\-2&-1&3\end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2=A$
   Montrer que si λ un nombre réel et $X_0\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur non nul tel que $AX_0=\lambda X_0$ alors $\lambda^2=\lambda$. En déduire les valeurs de λ.
   Pour quelles valeurs du réel λ, la matrice $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible ?
   Déterminer des bases de $E_0=\{X\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ /\ AX=0_{3,1}\}$ et $E_1=\{X\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ /\ AX=X\}$.
   On considère $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&2&1\end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} et vérifer que $A=P\,\mathrm{diag}(0,1,1)P^{-1}$.

   (c) Soit $A=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2=6A-5I_4$.
   Montrer que si λ un nombre réel et $X_0\in\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur non nul tel que $AX_0=\lambda X_0$ alors $\lambda^2=6\lambda-5$. En déduire les valeurs de λ.
   Pour quelles valeurs du réel λ, la matrice $A-\lambda I_4$ n'est pas inversible ?
   Déterminer des bases de $E_0=\{X\in\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})\ /\ AX=X\}$ et $E_1=\{X\in\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})\ /\ AX=5X\}$.
   On considère $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, calculer P^{-1} et vérifer que $A=P\,\mathrm{diag}(5,1,1,1)P^{-1}$.