Exercice 1

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+2b \\ 2a+b \end{pmatrix} \end{array} \right.$

On considère la famille (e_1, e_2) définie par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2).
3. En déduire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2). *Réponse* : $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4. Quelle est la matrice B de f dans la base (e_2, e_1) ?
5. Montrer l'existence d'une base (h_1, h_2) de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3a+4b \\ -a-b \end{pmatrix} \end{array} \right.$

On considère la famille (e_1, e_2) définie par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2).
3. En déduire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2). *Réponse* : $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$
4. Quelle est la matrice B de f dans la base (e_2, e_1) ?
5. Montrer l'existence d'une base (h_1, h_2) de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \mapsto & (-y+2z, 3x+4y-2z, 3z) \end{array} \right.$

On considère la famille (e_1, e_2, e_3) définie par $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (1,0,1)$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$, resp. $f(e_3)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3).
3. En déduire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, e_3). *Réponse* : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. Quelle est la matrice B de f dans la base (e_2, e_3, e_1) ?
   Quelle est la matrice C de f dans la base (e_3, e_1, e_2) ?
5. Montrer l'existence d'une base (h_1, h_2, h_3) de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Expliciter la matrice de changement de base de la base (e_1, e_2, e_3) dans la base (h_1, h_2, h_3).
7. Quelle est la relation entre A, D et P ? En déduire l'expression de A^n.

Exercice 4

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, 2x+3y+2z, z) \end{array} \right.$

On considère la famille (e_1, e_2, e_3) définie par $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$, $e_3 = (1,1,1)$.

1. Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.
2. Exprimer $f(e_1)$ (resp. $f(e_2)$, resp. $f(e_3)$) comme combinaison linéaire de (e_1, e_2, e_3).
3. En déduire la matrice A de f dans la base (e_1, e_2, e_3). *Réponse* : $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Quelle est la matrice B de f dans la base (e_2, e_3, e_1) ?
   Quelle est la matrice C de f dans la base (e_3, e_1, e_2) ?
5. Montrer l'existence d'une base (h_1, h_2, h_3) de $\mathfrak{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ telle que la matrice de f dans cette base soit la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Expliciter la matrice de changement de base de la base (e_1, e_2, e_3) dans la base (h_1, h_2, h_3).
7. Quelle est la relation entre A, D et P ? En déduire l'expression de A^n.