

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

EDHEC / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen

CONCOURS D'ADMISSION

option économique

MATHÉMATIQUES

Année 1990

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

EXERCICE 1

On considère une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 sur le corps des réels et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 défini par :

$$f(e_1) = ae_1 \quad ; \quad f(e_2) = ae_2 + be_1 \quad ; \quad f(e_3) = ae_3 + be_2 + ce_3,$$

où a, b, c sont trois réels fixés.

$$\text{On pose } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Ecrire la matrice $M(a, b, c)$ de f relativement à la base B .
(b) On appelle F l'ensemble de toutes les matrices $M(a, b, c)$ où a, b, c sont des réels quelconques. Démontrer que F est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et que tout élément de F se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de I, J, K .
- (a) Calculer les matrices J^2, K^2, JK, KJ .
En déduire que F est stable pour la multiplication des matrices.
(b) Déterminer les éléments de F qui sont inversibles et donner l'inverse d'une telle matrice.
- On note M pour $M(a, b, c)$.

- (a) Démontrer qu'il existe trois suites réelles $(x_n), (y_n), (z_n)$ telles que

$$M^n = x_n I + y_n J + z_n K \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = ax_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \\ z_{n+1} = cx_n + by_n + az_n \end{cases}$$

- (b) Déterminer x_n en fonction de n . On suppose désormais $a \neq 0$.
(c) On pose $u_n = \frac{y_n}{x_n}$. Déterminer u_n , puis y_n en fonction de n .
(d) En déduire la valeur de z_n .

EXERCICE 2

A- On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

- Etudier la fonction g .
- Construire la courbe représentative (C) dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthogonal. (On prendra comme unité graphique 2 cm en abscisses et 4 cm en ordonnées.)

3. On pose $I = \int_1^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx$.

- (a) Démontrer que I est une intégrale convergente.

(b) Démontrer que $I = \int_0^{+\infty} (t+1)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

(c) Démontrer que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

(d) En déduire que $I = 2 + \sqrt{2\pi}$.

B- On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = A^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de A pour que la fonction f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X .
2. Déterminer alors la probabilité $P(X \leq 2)$. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
N.B. Des tables relatives à la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ sont fournies en annexe au sujet.

PROBLEME

La société MARSCHA réalise auprès de sa clientèle une étude statistique relative au lancement d'un nouveau produit référencé A .

L'observation des ventes permet d'admettre que chaque client achètera le produit A , avec la probabilité $0,5$ et que les achats des clients sont mutuellement indépendants.

On considère un échantillon de n clients susceptibles d'acheter le produit A , et on appelle X_n le nombre de clients, parmi les n interrogés, qui achèteront effectivement le produit A .

On pose $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Première partie - A

1. (a) Préciser la loi de X_n . Quel est l'ensemble des valeurs prises par F_n ?
(b) Calculer $P(F_n = 1 - \frac{1}{n})$.
(c) Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
2. Trouver à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, le plus petit entier n tel que :

$$P[|F_n - 0,5| \geq 0,20] < 0,05.$$

Deuxième partie - B

L'objet de cette partie du problème est la recherche d'une autre majoration de

$$P[|F_n - 0,5| \geq a], \text{ où } 0,5 > a > 0.$$

1. On considère un entier naturel non nul m , un réel t tel que $0,5 \leq t \leq 1$ et la fonction f définie, pour x positif ou nul, par :

$$f(x) = \left(e^{-tx} + e^{(1-t)x} \right)^m.$$

- (a) Placer $\frac{t}{1-t}$ par rapport à 1 .
- (b) Etudier les variations de f sur \mathbb{R}_+ et construire son tableau de variation. On appellera b le minimum de f sur \mathbb{R}_+ .
- (c) Montrer que l'on a $f(x) = e^{-mtx}(1 + e^x)^m$.
- (d) En déduire que $b = \left(\frac{1}{t(1-t)^{1-t}} \right)^m$.

2. Soient $m \in \mathbb{N}^\times$, $t \in [0, 5; 1[$. On note r le plus petit entier strictement supérieur à mt .

On pose $S = \sum_{k=r}^m C_m^k$.

(a) Montrer que si k est un entier supérieur ou égal à r et si x est un réel positif ou nul, on a :

$$e^{x(k-mt)} \geq 1.$$

(b) En déduire que, si x est positif ou nul, on a : $S < \sum_{k=0}^m C_m^k e^{x(k-mt)}$.

(c) Démontrer alors que, pour tout réel x positif ou nul, on a $S < e^{-mtx}(1 + e^x)^m$.

(d) On pose, pour tout t tel que $0,5 \leq t < 1$, $g(t) = t \ln t + (1-t) \ln(1-t)$.
Montrer que $S < e^{-mg(t)}$.

On pourra utiliser le **B-1.(d)**

3. Soit a un réel positif, inférieur à $0,5$ et n un entier non nul.

On note u le plus petit entier supérieur à $(a + 0,5)n$ et v le plus grand entier inférieur à $(0,5 - a)n$.

(a) Montrer que $\sum_{i=u}^n C_n^i = \sum_{j=0}^v C_n^j$.

(b) Montrer que $[|F_n - 0,5| > a] = [X_n > n(a + 0,5)] \cup [X_n < (0,5 - a)n]$.

(c) En déduire que $P[|F_n - 0,5| > a] = (0,5)^{n-1} \sum_{i=u}^n C_n^i$.

(d) Conclure que $P[|F_n - 0,5| > a] < e(n)$ avec $e(n) = (0,5)^{n-1} e^{-ng(a+0,5)}$, g étant définie au **B-2.(d)**

4. On pose $\begin{cases} w(t) = g(t) & \text{si } t \in [0, 5; 1[\\ w(t) = 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$

Etudier la fonction w sur $[0, 5; 1]$. Préciser la tangente au point $A(1, 0)$ à la courbe $C(w)$ représentative de w . Tracer la courbe $C(w)$.

5. (a) Déduire du 3.(d) et du 4. que la limite de $P[|F_n - 0,5| > a]$ est nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

(b) Exprimer en fonction de a , la valeur du plus petit entier n pour que $e(n) \leq 0,05$. On appellera n_1 cet entier naturel.

Calculer n_1 si $a = 0,20$.

6. Il semble donc que les conditions d'approximation de la loi de X_n par une loi normale soient remplies.

(a) Préciser les paramètres de la loi normale approchant celle suivie par X_n .

(b) En utilisant l'approximation précédente, déterminer le plus petit entier n_2 tel que $P[|F_n - 0,5| > 0,2] \leq 0,05$.