ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option économique et technologique

MATHÉMATIQUES

Année 1995

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice I

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin x dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos x$$

   (a) Justifier l'existence de I_n et J_n.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, établir les relations

$$I_{n+1} = (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1} \qquad \text{et} \qquad J_{n+1} = -(n+1)J_n$$

   (c) Pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, calculer I_n et J_n.

2. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\pi^2}(1 - \cos x) & \text{si} \quad x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, 2\pi] \end{cases}$$

   Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire réelle X.

3. (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $F'(2\pi)$.

   (c) Donner le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
   Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $E(X)$ et de $\sigma(X)$.

5. Calculer les probabilités suivantes

   (a) $P(X > \frac{\pi}{2})$

   (b) $P(X < \frac{\pi}{2} \text{ ou } X > \frac{3\pi}{2})$

   (c) $P(|X - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2})$

   (d) $P[(X \geqslant \frac{\pi}{2})/(X \leqslant \frac{3\pi}{2}))$

   (Probabilité conditionnelle de l'évènement $(X \geqslant \frac{\pi}{2})$ sachant $(X \leqslant \frac{3\pi}{2})$)

EXERCICE II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\quad f(x) = x^3 + 5x - 1$

1. (a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

   (c) Etablir que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note (C) la courbe représentative de f dans ce repère.
   M_0 est le point de (C) d'abscisse 1. La tangente à (C) au point M_0 coupe l'axe $(O, \overrightarrow{i})$ en un point d'abscisse x_1. Soit M_1 le point de (C) d'abscisse x_1. En traçant la tangente à (C) au point M_1, on détermine de façon analogue le point M_2. On construit ainsi par récurrence une suite (M_n) de points de (C). On désigne enfin par x_n l'abscisse du point M_n.
   Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 5}$.

3. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$g(x) = 2x^3 - 3\alpha x^2 + 1 - 5\alpha$$
où α est le nombre défini à la question 1b.
Etudier les variation de g sur $\mathbb{R}$.
Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - \alpha$ à l'aide de g et x_n.
Etablir que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > \alpha.$$
   (b) Montrer que la suite (x_n) est strictement décroissante.
En déduire qu'elle est convergente. Quelle est la limite ?

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (x_{n+1} - \alpha) - (x_n - x_{n+1})$.
Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n à l'aide de α et de x_n.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = x^3 - 3\alpha x^2 - 5x + 2 - 5\alpha$.
Etudier les variations de h sur $[0, 1]$.
   (c) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - \alpha < x_n - x_{n+1}$.

5. (a) Ecrire en PASCAL un programme qui calcule x_N et x_{N+1}, où N est le plus petit entier n pour lequel la condition $|x_{n+1} - x_n| \leqslant 10^{-5}$ est réalisée.
   (b) Expliquer pourquoi un tel programme permet d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

PROBLEME

Notations

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On désigne par $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On rappelle que, par définition : $\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \quad \varepsilon_3 = (0, 0, 1)$.
On pose :
$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$
Enfin, on désigne par u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A pour matrice dans la base $\mathcal{E}$.

PREMIERE PARTIE : étude de la matrice A

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) A est-elle inversible ?
   (c) A est-elle diagonalisable ?

2. On pose
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Montrer qu'il existe une base $E = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que P soit la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ dans la base E et telle que D soit la matrice de u dans la base E.

4. En utilisant la méthode du pivot de Gauss, montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

5. Justifier rapidement et sans calcul l'égalité : $P^{-1}AP = D$;

6. Montrer qu'une matrice Δ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $\Delta D = D\Delta$ si et seulement Δ est diagonale.

DEUXIEME PARTIE : résolution dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation du second degré : $X^2 = A$

On se propose dans cette partie de déterminer toutes les matrices X de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant

$$X^2 = A$$

1. On considère $X \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $X^2 = A$; on pose $Y = P^{-1}XP$.
   Vérifier que $Y^2 = D$; montrer que $YD = DY$, puis établir que Y est de la forme :

   $$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma' \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \gamma \in \{-1, 1\} \text{ et } \gamma' \in \{-1, 1\}.$$

   En déduire la forme de la matrice X puis montrer, sans calculer explicitement les coefficients de X^2, qu'une telle matrice X vérifie bien : $X^2 = A$.

2. Quel est le nombre m de solutions dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de l'équation du second degré $X^2 = A$?
   Sans calculer explicitement ces m solutions $X_1, X_2, ..., X_m$, déterminer leur somme $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$ et exprimer leur produit $T = X_1 X_2 \cdots X_m$ en fonction de A.

TROISIEME PARTIE : calcul de A^n et application à une étude de suites

1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\times}$; calculer D^n puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n.

2. Soient a, b et c trois réels.
   On considère les suites $(p_n), (q_n)$ et (r_n) définies par

   $$p_0 = a, \quad q_0 = b, \quad r_0 = c \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} p_{n+1} = 16p_n + 4q_n - 4r_n \\ q_{n+1} = -18p_n - 4q_n + 5r_n \\ r_{n+1} = 30p_n + 8q_n - 7r_n \end{cases}$$

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.
   Exprimer U_n à l'aide de A et de U_0; en déduire, que pour $n \geqslant 1$, les expressions de p_n, q_n et r_n en fonction de a, b, c et de n.

   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et c pour que les suites $(p_n), (q_n)$ et (r_n) tendent vers une limite finie lorsque n tend vers plus l'infini.
   Cette condition étant supposée remplie, que peut-on dire des suites (p_n), (q_n) et (r_n) ?

QUATRIEME PARTIE : $C(A) = \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM = MA\}$

1. Montrer que $M \in C(A)$ si et seulement $P^{-1}MP$ est diagonale.

2. En déduire que $C(A)$ est égal à l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme :

   $$aM_1 + bM_2 + cM_3 \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

   où M_1, M_2 et M_3 sont trois matrices que l'on déterminera.

3. Montrer que (M_1, M_2, M_3) est une famille libre d'éléments de $C(A)$. En déduire l'unicité de l'écriture d'une matrice M de $C(A)$ sous la forme (1).