ECRI COME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option economique

MATHÉMATIQUES I

Année 1997

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice1

α est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\alpha + k)}$$

1. Etude de la convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$

   (a) Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Que peut-on déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
   On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$

   (b) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que :

   $$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ell(\alpha)}{n}$$

   (c) Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$

2. Dans cette question : $\alpha \in]0, 1]$

   (a) Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n(\alpha) \geqslant \frac{1}{n+\alpha}$$

   (b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

3. On pose pour tout entier naturel n :

   $$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-t}\right)^n dt$$

   (a) Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$

   (b) Soit un réel x strictement positif. Intégrer par parties :

   $$\int_0^{x} e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-t}\right)^n dt$$

   et en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$, pour tout n entier naturel non nul.

   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N} \;\; I_n(\alpha) = u_n$

4. On suppose désormais que $\alpha > 1$

   (a) Montrer que, pour tout N entier naturel :

   $$\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1)$$

   (b) En déduire que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est convergente, et donner en fonction de α la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.

Exercice 2

$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à trois lignes dont les coefficients sont réels.
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où x, y et z sont des nombres réels.
On définit alors une suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \mathbb{X}_{n+1} = AX_n + B \end{cases}$$

1. Montrer que 0 , $\frac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de A, et préciser des vecteurs propres u, v et w qui leur sont respectivement associés.

2. Justifier les affirmations suivantes :

   - il existe un unique triplet (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tel que :

   $$B = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

   - Pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :

   $$X_n = \alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w$$

3. Etablir par récurrence que

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - 2\beta) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$$

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

   On dit que la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Dans ce cas on écrit :

$$\lim X_n = \begin{pmatrix} \lim a_n \\ \lim b_n \\ \lim c_n \end{pmatrix}$$

   (a) Prouver que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si le réel γ (introduit en 2.) est nul.

   (b) En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$3x - 4y + 12z = 0$$

5. On dit que le couple (A, B) admet une position d'équilibre stable si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite quelle que soit la valeur de X_0.

Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur de B, le couple (A, B) n'admet pas de position d'équilibre stable.

Exercice 3

Dans tout le problème (qui comporte deux parties indépendantes), on suppose que la durée, exprimée en minutes, d'une communication téléphonique est une variable aléatoire réelle D qui suit la loi exponentielle de paramètre α

I Comparaison de deux tarifications

Pour ses communications, on propose à l'utilisateur d'une ligne téléphonique deux tarifications T_1 et T_2, exprimées en francs, définies de la façon suivante :

- $T_1 = aD$, où a est un nombre réel strictement supérieur à 1 qui représente le prix d'une minute de communication
- T_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout n entier naturel non nul : $\{T_2 = n\} = \{n-1 < D \leqslant n\}$

1. Calculer $E(T_1)$ en fonction de a et de α.
2. Déterminer la loi de T_2. De quelle loi s'agit-il ? Exprimer $E(T_2)$ en fonction de α
3. On pose :
$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+^* : \varphi(t) = \dfrac{t}{1-e^{-t}} \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$
   (a) Montrer que φ est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$
   (b) On définit de plus la fonction ψ sur $[0, +\infty[$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R} : \psi(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$$
   Utiliser cette fonction pour en déduire que φ réalise une bijection de$[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$
4. Comparaison des tarifications
   (a) Montrer qu'il existe un unique réel α_0 strictement positif tel que $\varphi(\alpha_0) = a$
   (b) Préciser quelle est, en moyenne, la tarification la plus avantageuse suivant la valeur de la durée moyenne d'une communication.
5. Pour $a = 1,25$ donner, en utilisant votre calculatrice. une valeur approchée de $\dfrac{1}{\alpha_0}$
   (on ne donnera que les deux premières décimales fournies par la calculatrice).

II Étude d'un standard téléphonique

Dans toute cette partie, θ est un nombre réel strictement positif représentant un temps exprimé en minutes. Un standard téléphonique de capacité illimitée reçoit des communications téléphoniques entre l'instant 0 et l'instant θ inclus.

II. A) Cas d'une seule communication

On désigne par n un entier naturel non nul. L'instant où débute la communication est une variable aléatoire réelle I_n telle que :
$$\begin{cases} I_n(\Omega) = \left\{ \dfrac{\theta}{n}, \dfrac{2\theta}{n}, \dots, \dfrac{(n-1)\theta}{n}, \dfrac{n\theta}{n} \right\} \\ \forall k \in [[1, n]] : p\left(I_n = \dfrac{k\theta}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$
où p désigne la probabilité. De plus I_n et D (la durée aléatoire de la communication) sont indépendantes.

1. Pour tout réel positif t, rappeler quelle est l'expression de $p(D > t)$ en fonction de t et de α.

2. En déduire, pour k élément de $[[1, n]]$ la probabilité conditionnelle de $\{D + I_n > \theta\}$ sachant $\left\{I_n = \dfrac{k\theta}{n}\right\}$.

3. Démontrer l'égalité suivante :

$$p(D + I_n > \theta) = \frac{1}{n}\left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{1 - e^{-\frac{\alpha\theta}{n}}}\right)$$

4. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} p(D + I_n > \theta)$$

II. B) Étude de l'encombrement du standard à l'instant θ

Dans cette partie on définit les nombres réels p et q par :

$$p = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta} \text{ et } q = 1 - p$$

On suppose désormais que la probabilité qu'une communication reçue dans l'intervalle de temps $[0, \theta]$ se poursuive au-delà de l'instant θ est égale à p.
On note N_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0, \theta]$ et l'on suppose que N_θ suit une loi de Poisson de paramètre θ.
On noteC_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0, \theta]$ qui se poursuivent au-delà de l'instant θ
Les instants aléatoires où les communications se terminent sont mutuellement indépendant.

1. Loi de probabilité de C_θ

   (a) Soit r un entier naturel. Quelle est la loi conditionnelle de C_θ sachant que $\{N_\theta = r\}$?

   (b) Démontrer que l'on a :

   $$\forall r \in \mathbb{N} \;\; \forall k \in [[0, r]], \quad p(\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}) = \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k (q\theta)^{r-k}}{k!\,(r-k)!}$$

   (c) En déduire, pour tout entier naturel k, une expression simple de $p(C_\theta = k)$ en fonction de k, p, et θ. Quelle est la loi de probabilité de C_θ?

2. Étude de l'espérance de C_θ

   (a) Déterminer l'expression de $E(C_\theta)$ en fonction de θ et de α.

   (b) Quelle est la limite de $E(C_\theta)$ lorsque θ tend vers$+\infty$? Vérifier qu'elle majore $E(C_\theta)$.